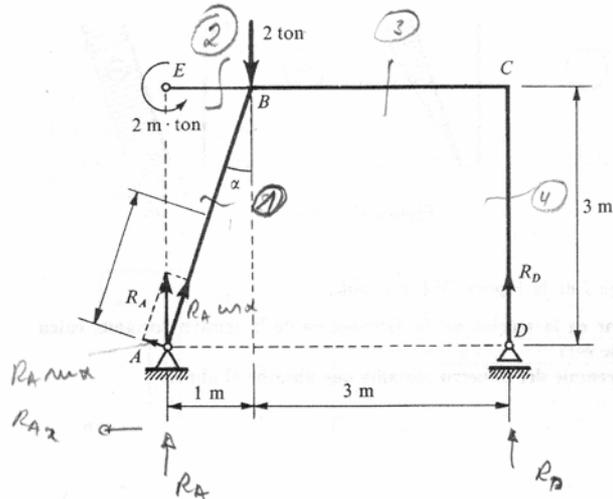


Septiembre 2002

2. Trazar los diagramas de esfuerzo normal, cortante y momento flector, así como la deformada del pórtico de la figura.



$$L_{AB} = 3'10 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 18'43''$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10} \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad R_A + R_D - 2 = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad 2 \cdot 1 - R_D \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

Inicialmente se calculan las reacciones en A y D mediante las ecuaciones de la estática.

$$\begin{cases} R_D = 0 \text{ ton} \\ R_A = 2 \text{ ton} \end{cases}$$

Para trazar los diagramas, los cambios en la geometría y las solicitaciones nos obligan a estudiar las cuatro secciones indicadas:

Sección 1

$$\begin{aligned} N &= -R_A \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{10}} \sqrt{10} = -1.89 \text{ ton} \\ V &= R_A \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 0.63 \\ M_F &= R_A \sin \alpha \cdot x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} x \end{aligned}$$

La reacción  $R_A$  se proyecta según la dirección de la viga.



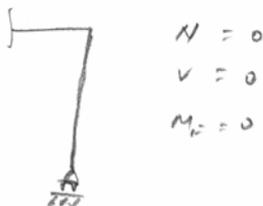
Sección 2

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= 0 \\ M_F &= -2 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

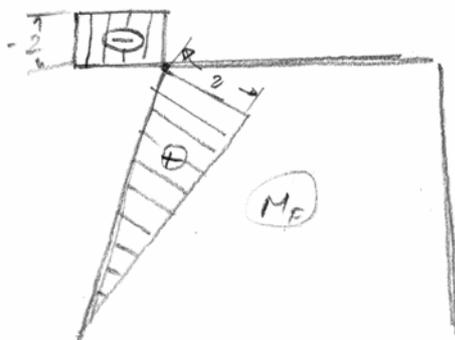
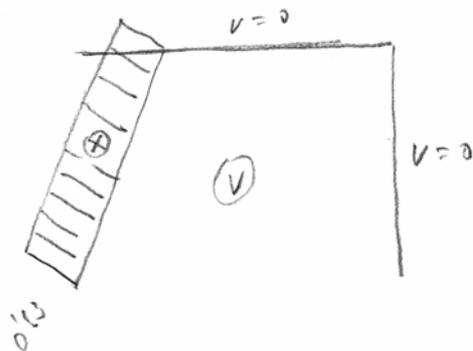
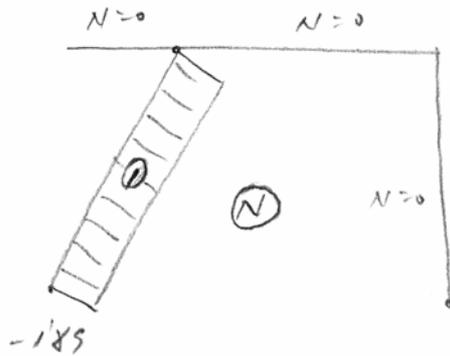
Sección 4

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= 0 \\ M_F &= 0 \end{aligned}$$

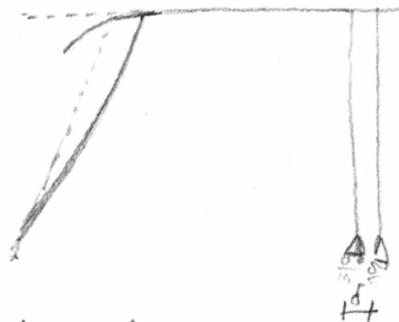
Sección 3



Los diagramas anotados son:



Deformada aproximada. En B se mantendrán los ángulos que forman las barras antes de la deformación.



- Escoger el perfil IPN más adecuado si  $\sigma_{adm} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ .

$$M_F : 2 \text{ ton m} = 2000 \text{ kg m} = 200000 \text{ kg cm}$$

$$\sigma = \frac{M_F}{W} + \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} \quad W \geq \frac{M_F}{\sigma_{adm}} = \frac{200000}{2000} = 100$$

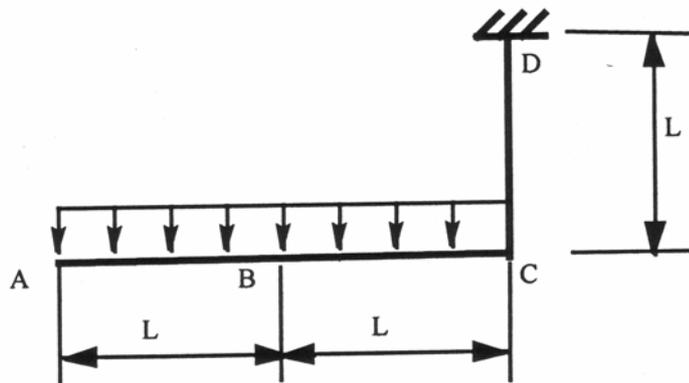
$$\text{IPN } 160 \rightarrow \begin{cases} W = 117 \text{ cm}^3 \\ A = 22.8 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

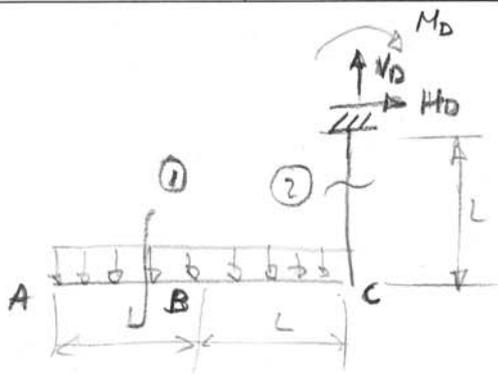
$$\sigma = \frac{200000}{117} + \frac{189}{22.8} = 1709.48 \text{ kg/cm}^2$$

El punto más desfavorable es el nudo B que está sometido a flexión y compresión. El esfuerzo cortante lo despreciamos frente a los anteriores.

Se hace una primera aproximación resolviendo sólo por la flexión y después se comprueba que al incluir el esfuerzo normal no se sobrepasa la tensión admisible.

2. Las barras AC (de longitud  $2L$ ) y CD (de longitud  $L$ ) están situadas en un plano vertical, son ortogonales entre sí (AC es horizontal) y están rígidamente unidas en C. En D hay un empotramiento y la AC recibe una carga vertical uniformemente repartida de valor  $q$ . Ambas barras son del mismo material y sección. Se pide:
- Dibujar los diagramas acotados de tracción, esfuerzo cortante y flexión, así como la deformada estimada de la viga.
  - Calcular la tensión máxima que se produce en la estructura indicando razonadamente en qué punto se producirá.
  - Calcular el giro y el desplazamiento de la sección B, situada en el punto medio de AC.
- Nota, cuando sea necesario, dejar los resultados en función de  $E$ ,  $I$  y  $S$ .





Como siempre, lo primero es obtener las reacciones en el empotramiento.

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_D = 0$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_D - 2qL = 0$$

$$V_D = 2qL$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 2qL^2 - M_D = 0$$

$$M_D = 2qL^2$$

Para dibujar los diagramas estudiamos las 2 secciones indicadas

Sección 1



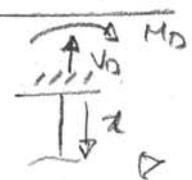
$$M_F(x=2L) = -2qL^2$$

$$N = 0$$

$$V = -qx$$

$$M_F = -\frac{q}{2}x^2$$

Sección 2



$$N = V_D = 2qL$$

$$V = 0$$

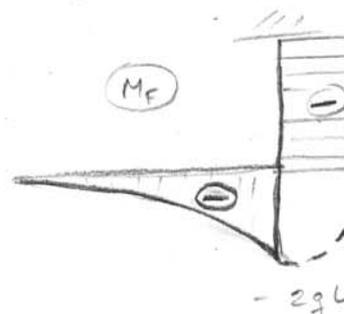
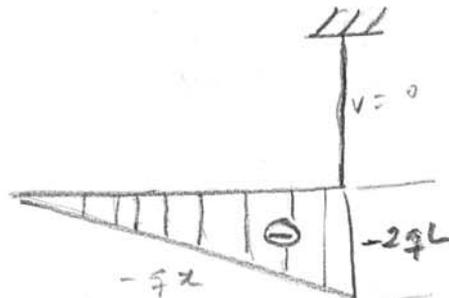
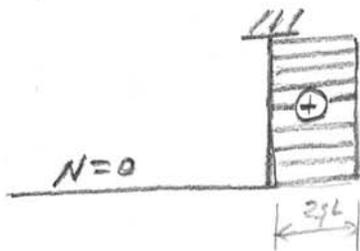
$$M_F = -M_D = -2qL^2$$

Ahora se pueden dibujar los diagramas:

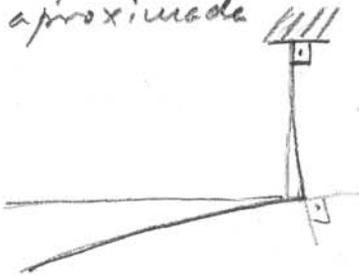
Esfuerzo normal

Esfuerzo cortante

Momento flexión



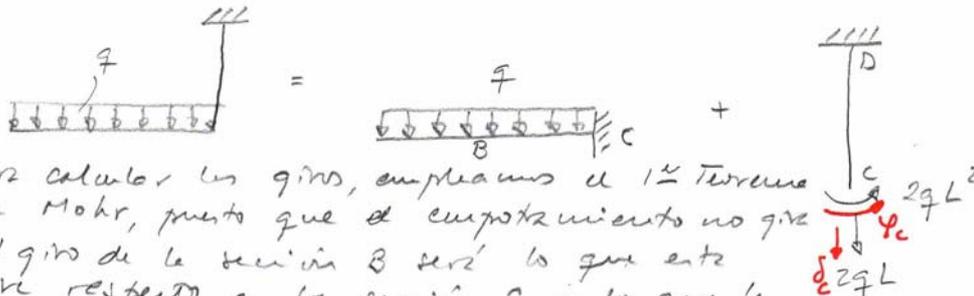
Deformada aproximada



La tensión máxima se producirá en la sección C, donde el momento flexión es máximo y su valor será

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_F \cdot y_{\text{máx}}}{I_2} = \frac{-2qL^2 \cdot y_{\text{máx}}}{I_2}$$

Para calcular los giros y desplazamientos, descomponemos el sistema como se indica en la figura siguiente



Para calcular los giros, empleamos el 1º teorema de Mohr, puesto que el empotramiento no gira. El giro de la sección B será lo que entre giro respecto a la sección C y lo que la sección gira respecto al empotramiento D.

$$\varphi_B = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-D} = \int_L^{2L} \left( \frac{-q x^2}{2EI_z} \right) dx + \int_0^L \left( \frac{-2qL^2}{EI_z} \right) dx = -\frac{7}{6} \frac{qL^3}{EI_z} - \frac{2qL^3}{EI_z}$$

$$\varphi_B = -\frac{19qL^3}{6EI_z} \text{ en sentido antihorario.}$$

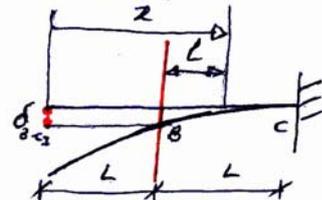
Desplazamiento de la sección B. Se desprecia el desplazamiento horizontal

$$\delta_{B_v} = \delta_c + \delta_{B-C}$$

$\delta_c$  es debido a la tracción, entonces  $\delta_c = \frac{F \cdot L}{SE} = -\frac{2qL^2}{SE}$

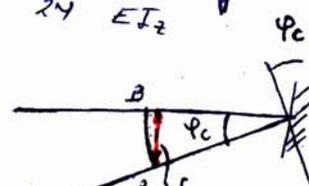
$\delta_{B-C}$  es el desplazamiento vertical de la sección B con respecto a la sección C. Se debe a dos motivos:

- a) A la flexión del tramo BC respecto al "empotramiento" en C. Lo calculamos mediante el 2º teorema de Mohr como la distancia del punto B de la deformada a la tangente en C.



$$\delta_{B-C_I} = \int_B^C \frac{M_f(x)}{EI_z} \cdot l dx = \int_L^{2L} \frac{-qx^2}{2EI_z} (x-L) dx = -\frac{17}{24} \frac{qL^4}{EI_z}$$

- b) Al giro de la sección C. Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, podemos calcular el desplazamiento como.



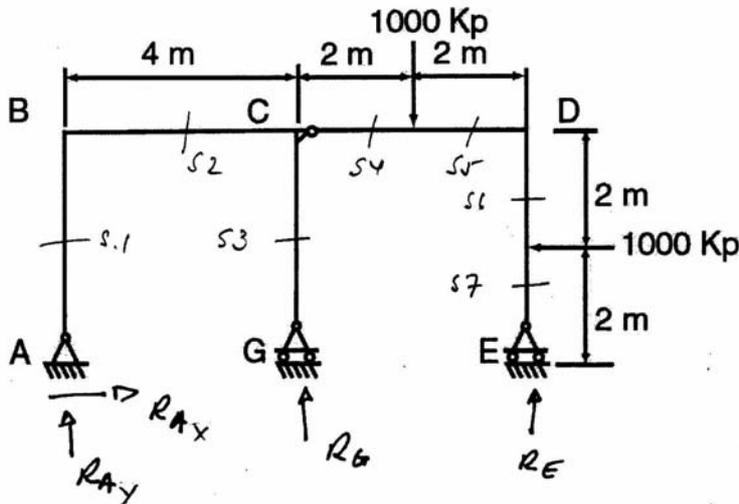
$$\delta_{B-C_{II}} = \varphi_c \cdot L = -\frac{2qL^3}{EI_z} \cdot L = -\frac{2qL^4}{EI_z}$$

Finalmente, la suma de ambos nos proporciona el desplazamiento total.

$$\delta_{B_v} = -\frac{2qL^2}{SE} - \frac{17}{24} \frac{qL^4}{EI_z} - 2 \frac{qL^4}{EI_z} = -2 \frac{qL^2}{SE} - \frac{65}{24} \frac{qL^4}{EI_z}$$

**Junio 2003**

El pórtico de la figura presenta una rótula en el nudo C que une el pórtico ABCG con el semipórtico CDE. Recibe una carga horizontal de 1000 Kp y otra carga vertical de 1000 Kp según se indica en la figura. Calcular y dibujar, acotados, los diagramas de esfuerzos normales, cortantes y momentos flectores. Dibujar también la deformada aproximada de la estructura. Indicar en qué punto la estructura se verá sometida a la máxima tensión. Calcular el perfil IPN necesario para la estructura si  $\sigma_{adm} = 2.000 \text{ kg/cm}^2$ .



Calculamos las reacciones aplicando las ecuaciones de la estática y la ecuación de la rótula  $M_c = 0$ .

$$\sum F_x = 0 \quad - 1000 + R_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{R_{Ax} = 1000 \text{ Kp}} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{Ay} + R_G + R_E - 1000 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad 1000 \cdot 6 - 1000 \cdot 2 - R_G \cdot 4 - R_E \cdot 8 = 0$$

$$1000 - R_G - 2R_E = 0 \quad (3)$$

$M_c = 0$  (considerando el elemento representado)

$$1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 2 - R_E \cdot 4 = 0 \quad (4)$$

$$\boxed{R_E = 1000 \text{ Kp}}$$

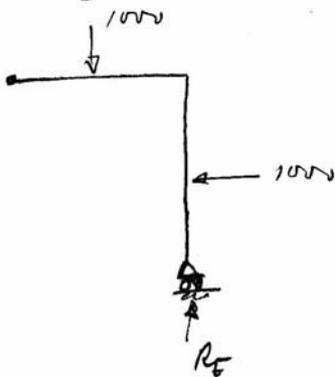
Volviendo a (3)

$$\boxed{R_G = 1000 - 2 \cdot 1000 = -1000 \text{ Kp}}$$

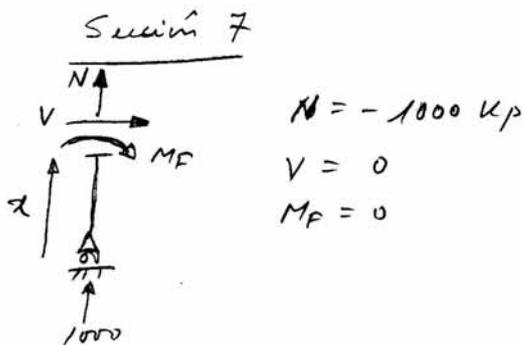
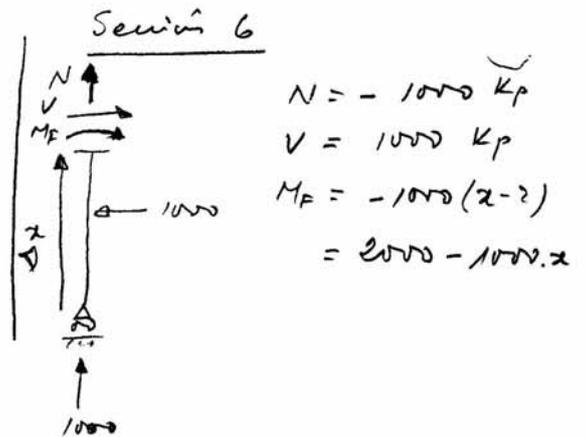
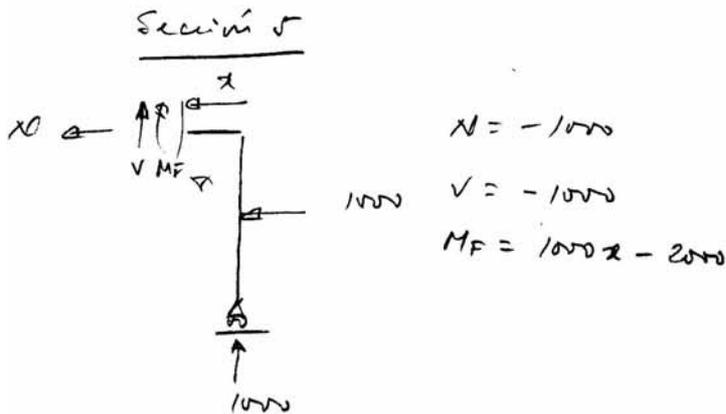
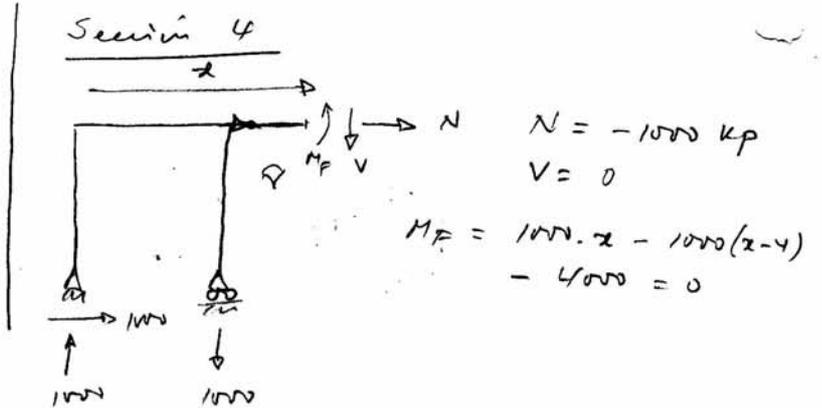
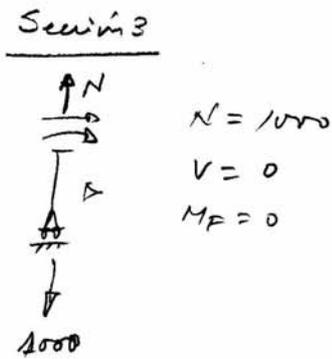
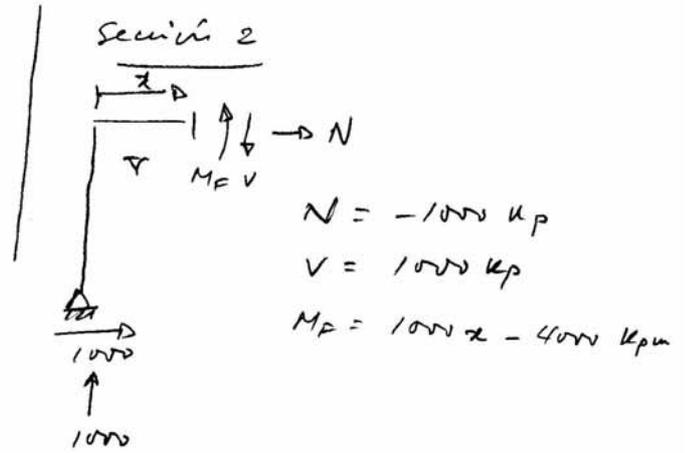
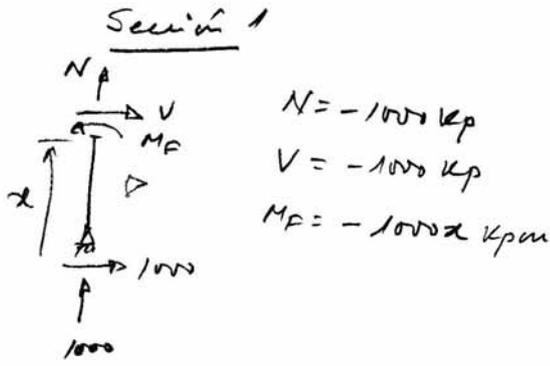
Luego su sentido es el contrario al supuesto

Y en (2)

$$\boxed{R_{Ay} = 1000 - R_E - R_G = 1000 - 1000 + 1000 = 1000 \text{ Kp}}$$

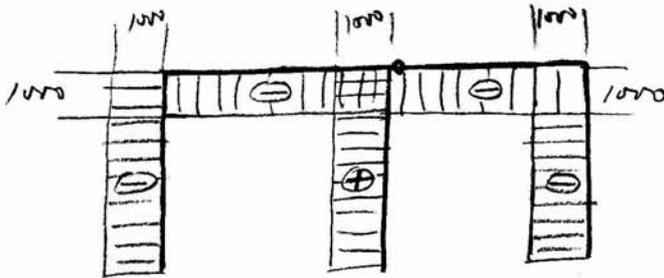


Pacientemente, hay que analizar las 7 secciones indicadas.

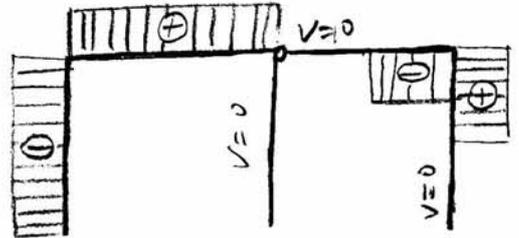


# Diagramas

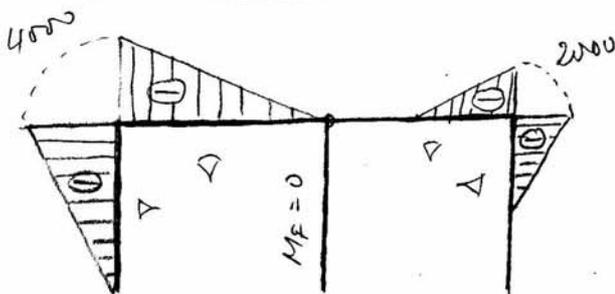
## Esfuerzo Normal



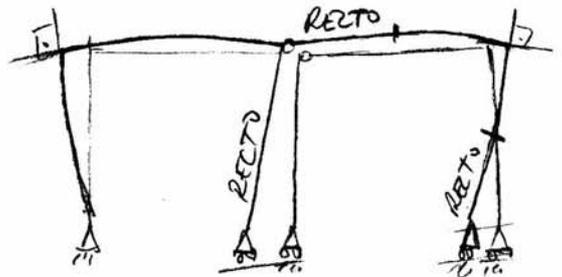
## Esfuerzo Cortante



## Momento Flector



## Deformada aproximada



La tensión máxima la tendremos en el punto B.  
 Ahí se tiene  $M_F = 4000 \text{ kg.m}$  y  $N = -1000$ . Dimensionemos  
 en ese punto

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A} < \sigma_{adm}$$

Primero consideremos solamente el flector:

$$\sigma = \frac{400000 \text{ kg.cm}}{W} < 2000 \rightarrow W = \frac{400000}{2000} = 200 \text{ cm}^3$$

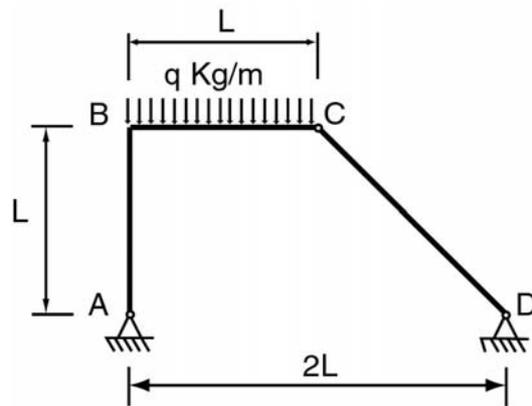
En principio sería suficiente el IPN 200 }  $W = 214 \text{ cm}^3$   
 $A = 33.5 \text{ cm}^2$   
 Verifiquemos que admite el esfuerzo normal

$$\sigma = \frac{400000}{214} + \frac{1000}{33.5} = 1899 \text{ kg/cm}^2$$

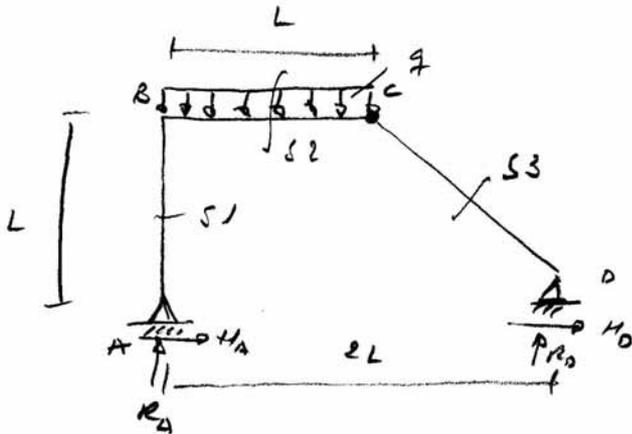
Por tanto, servirá este perfil.

### Septiembre 2003

El pórtico de la figura tiene una rótula en C y soporta una carga uniformemente repartida de  $q$  Kg/m en el tramo BC. Trazar los diagramas de esfuerzo normal, cortante, momento flector y deformada aproximada del sistema de la figura en función de la carga uniformemente repartida  $q$ . Escoger el perfil IPN adecuado si  $L=4$  m y  $q=50$  Kg/m y  $\sigma_{adm}=2.000$  kg/cm<sup>2</sup>.



Ecuaciones de la Estática



$$R_A + R_D - qL = 0$$

$$H_A + H_D = 0$$

$$\frac{qL^2}{2} - R_D \cdot 2L = 0$$

$$R_D = \frac{qL}{4}$$

$$R_A = \frac{3qL}{4}$$

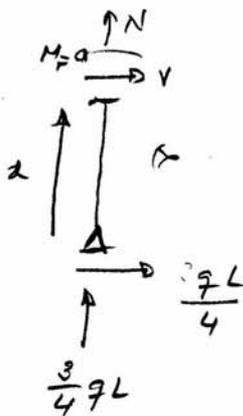
Necesitamos una ecuación adicional que se obtiene de la Rótula en C donde  $M = 0$

$$M_C = 0 \quad R_D \cdot L + H_D \cdot L = 0 \rightarrow H_D = -R_D = -\frac{qL}{4}$$

$$\text{Y entonces } H_A = -H_D = \frac{qL}{4}$$

Para trazar los diagramas estudiamos las 3 secciones indicadas

Sección 1

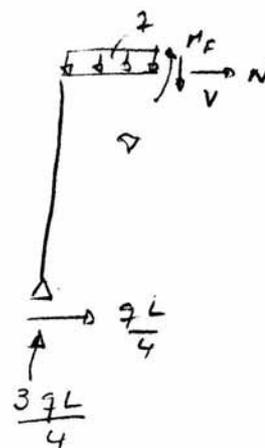


$$N = -\frac{3}{4}qL$$

$$V = -\frac{qL}{4}$$

$$M_F = -\frac{qL}{4}x$$

Sección 2



$$N = -\frac{qL}{4}$$

$$V = \frac{3qL}{4} - qx$$

$$M_F = \frac{3qL}{4}x - \frac{q}{2}x^2 - \frac{qL^2}{4}$$

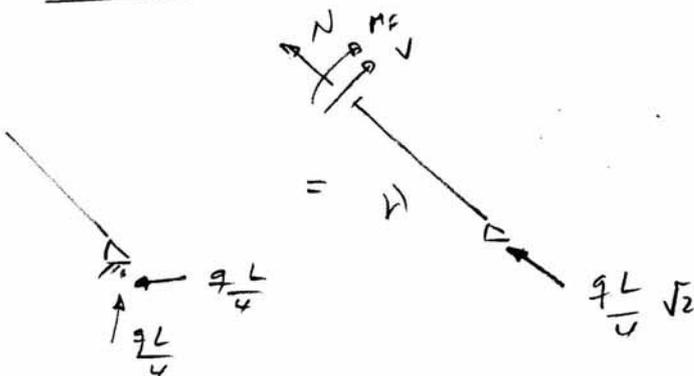
$$M_F(x=L) = \frac{3qL^2}{4} - \frac{qL^2}{2} - \frac{qL^2}{4}$$

$$M_F(x=L) = 0$$

$$M_F(x = \frac{3}{4}L) = \frac{18}{32}qL^2 - \frac{9}{32}qL^2 - \frac{qL^2}{32}$$

$$M_F = \frac{1}{32}qL^2$$

Sección 3

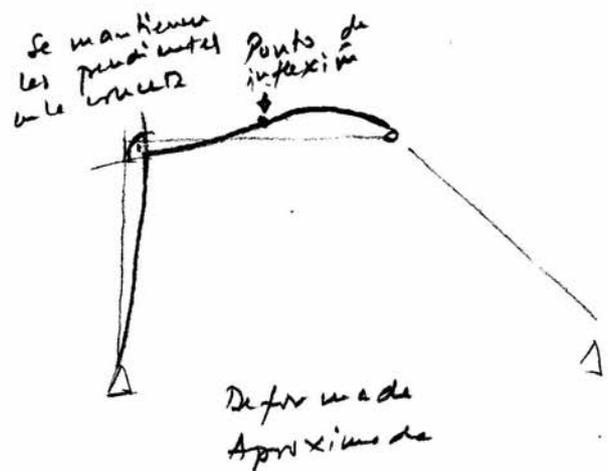
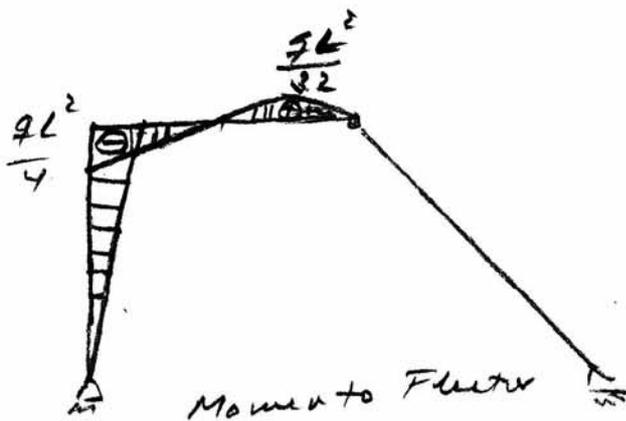
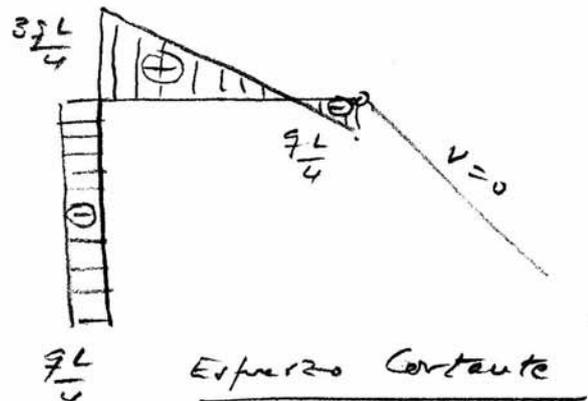
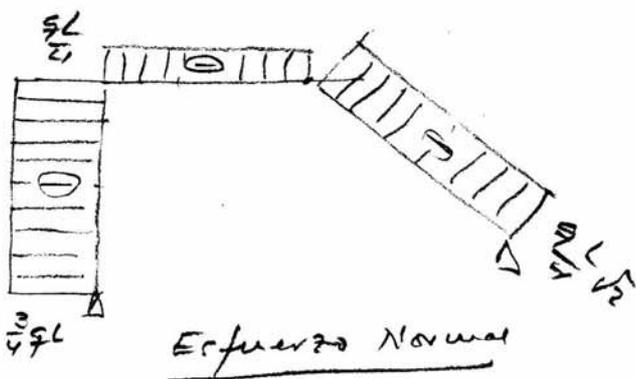


$$N = -\frac{qL}{4}\sqrt{2}$$

$$V = 0$$

$$M_F = 0$$

# Diagramas



El momento flexor es máximo en B.  
Dimensionamos así desde también hay esfuerzos normal.

$$\sigma = \frac{M}{W} < \sigma_{adm} \quad W > \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{\frac{7L^2}{2}}{\sigma_{adm}} = \frac{15 \cdot \frac{400^2}{2}}{2000 \text{ kg/cm}^2}$$

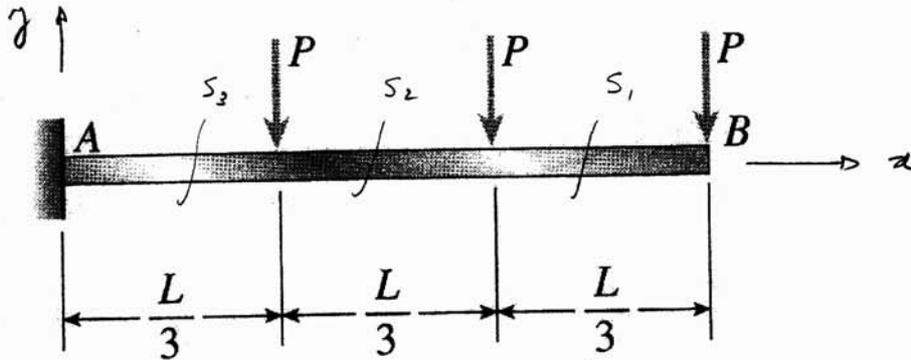
$$W > \frac{20.000}{2000} \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3$$

Escogemos un perfil IPN - 80. de  $W = 19.5 \text{ cm}^3$  y  $A = 7.58 \text{ cm}^2$ . Comprobamos que, al incluir el esfuerzo normal no se supera la  $\sigma_{adm}$ .

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{50}{7.58} + \frac{20.000}{19.5} = 1032 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{adm}$$

**Diciembre 2003.**  
**1º Parcial**

Trazar los diagramas de esfuerzos y escoger el perfil HEB más adecuado para la estructura si la tensión admisible es  $\sigma_{adm} = 1.000 \text{ Kp/cm}^2$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $P = 2 \text{ Tm}$ . Obtener el giro y el desplazamiento del extremo B mediante los teoremas de Mohr.  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .



Para trazar los diagramas de esfuerzos, estudiaremos el equilibrio de las 3 unidades indicadas. Empleamos el sistema de ejes indicados. Primero calculamos las reacciones en A

$$\sum F_v = 0 \quad R_A = 3P$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A - P \cdot \frac{L}{3} - \frac{2PL}{3} - PL = 0$$

$$M_A = 2PL$$

Sección 1

$$V = 3P$$

$$M_F = 3Px - 2PL$$

Sección 2

$$V = 2P$$

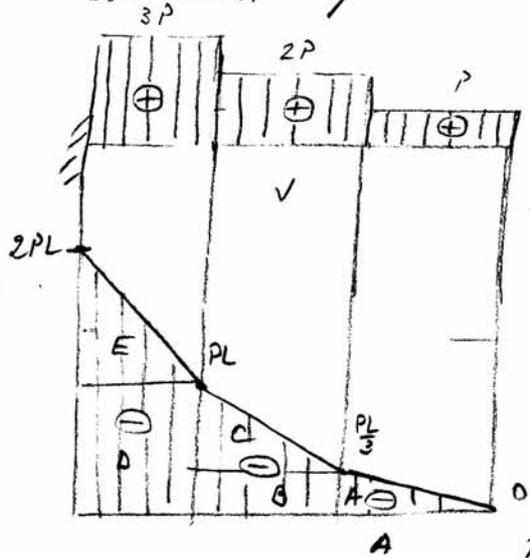
$$M_F = 3Px - P(x - \frac{L}{3}) - 2PL = 2Px - \frac{5PL}{3}$$

Sección 3

$$V = P \quad \text{Además } y = L - x$$

$$M_F = -Py = -P(L - x) = Px - PL$$

Ahora podemos trazar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flexionales.



A partir del diagrama de  $M_F$  podemos calcular el giro de B con respecto a A y el desplazamiento relativo de B con respecto a A mediante los teoremas de Mohr.

Por el 1º teorema sabemos que el giro es el área del  $M_F$  dividida por  $ET_2$ . El área la descomponemos en la de las áreas A, B, C, D y E.

$$\theta_{B-A} = -\frac{1}{ET_2} \left( \frac{1}{2} \frac{L}{3} \frac{PL}{3} + \frac{L}{3} \frac{PL}{3} + \frac{1}{2} \frac{L}{3} \frac{2PL}{3} + \frac{L}{3} PL + \frac{1}{2} \frac{L}{3} PL \right)$$

$$\theta_{B-A} = -\frac{7PL^2}{9ET_2} = -\frac{7 \cdot 2000 \cdot (600)^2}{9 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 43190} = -6'4 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0'37''$$

El signo negativo implica que el giro es en sentido horario.

Primamente tendríamos que haber elegido el perfil HEB.

$$W \geq \frac{M_F}{\sigma_{adm}} = \frac{2PL}{1000} = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 600}{1000} = 2400 \text{ cm}^3$$

Llegaría el HEB 300 con  $W_x = 2400 \text{ cm}^3$  e  $I_x = 43190 \text{ cm}^4$

Mediante el 2º teorema de Mohr se puede calcular el desplazamiento. Tomamos los momentos del área del diagrama respecto a una vertical por B.

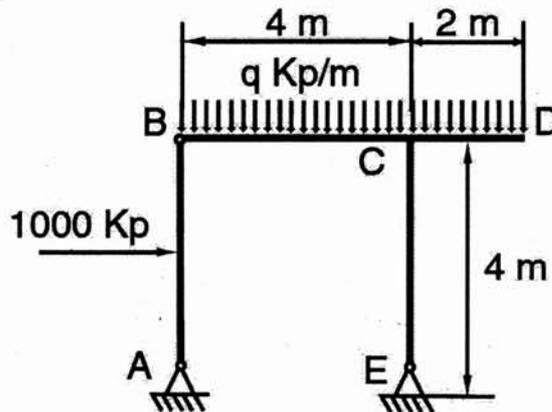
$$\delta_{B-\text{tag A}} = -\frac{1}{ET_2} \left( \frac{2L}{3} \frac{PL^2}{3} \cdot \frac{1}{18} + \left( \frac{L}{3} + \frac{L}{6} \right) \frac{PL^2}{9} + \left( \frac{L}{3} + \frac{2}{3} \frac{L}{3} \right) \frac{PL^2}{9} + \left( \frac{2L}{3} + \frac{L}{6} \right) \frac{PL^2}{3} + \left( \frac{2L}{3} + \frac{2}{3} \frac{L}{3} \right) \frac{PL^2}{6} \right) = -\frac{87}{112} \frac{PL^3}{ET_2}$$

$$\delta_{B-\text{tag A}} = -\frac{87}{112} \frac{2000 (600)^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 43190} = -2'18 \text{ cm}$$

**Febrero 2004 (examen parcial).**

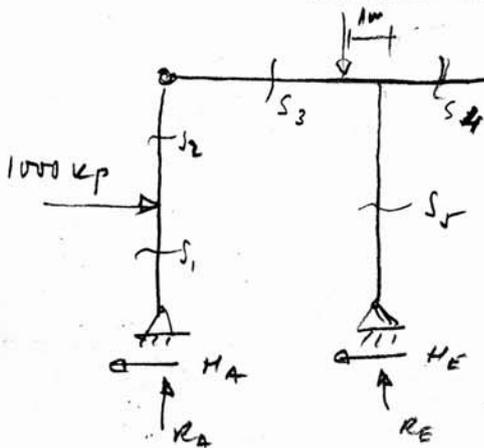
El pórtico de la figura tiene una articulación en el punto B y está sometido a la acción de las cargas indicadas en la figura. En el dintel, entre B y D, actúa una carga uniformemente repartida  $q=125 \text{ Kp/m}$  y en el punto medio del pilar AB actúa una carga horizontal de 1000 Kp. Se pide:

- Dibujar los diagramas acotados de esfuerzo normal, esfuerzo cortante, momento flector y deformada.
- Escoger el perfil IPN más adecuado si  $\sigma_{adm}=2.000 \text{ kg/cm}^2$ . Se empleará el mismo perfil para toda la estructura, de acero A 42.
- Se pide calcular el giro y el desplazamiento del extremo D del voladizo con respecto a su empotramiento en C.



Primero calculamos las reacciones:

$$R = 125 \times 6 = 750$$



$$\sum F_H = 0 \rightarrow (H_A + H_E) + 1000 = 0$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow R_A + R_E - 750 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3 \times 750 + 1000 \cdot 2 - 4 \cdot R_E = 0$$

$$R_E = \frac{4250}{4} = 1062.5 \text{ Kp}$$

$$R_A = 750 - R_E = 750 - 1062.5 = -312.5 \text{ Kp}$$

Hay más incógnitas que ecuaciones.

El problema es hiperestático de grado 1.

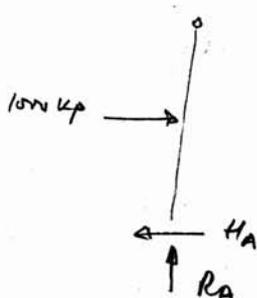
Necesitamos otra ecuación. Para ello nos apoyamos en la rótula que no absorbe momentos.

$$M_B = 0$$

$$1000 \cdot 2 - H_A \cdot 4 = 0$$

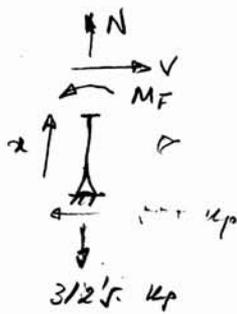
$$H_A = \frac{2000}{4} = 500 \text{ Kp}$$

$$H_E = 1000 - H_A = 500 \text{ Kp}$$



Ahora ya se puede calcular los esfuerzos en las barras. Para ello damos en la estructura las secciones indicadas,  $S_1, S_2, \dots, S_5$

Sección 1

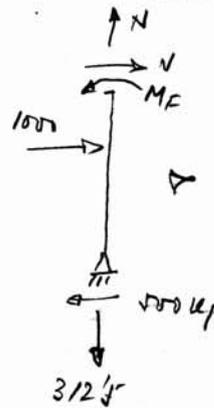


$$N = +312.5 \text{ kp}$$

$$V = 500 \text{ kp}$$

$$M_F = 500 \cdot 2 \text{ kp.m}$$

Sección 2



$$N = +312.5 \text{ kp}$$

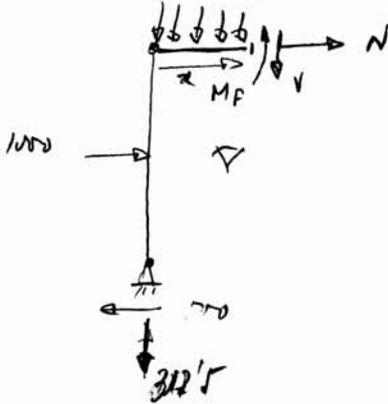
$$V = -500 \text{ kp.m}$$

$$M_F = 500 \cdot x - 1000(x-1)$$

$$N_F = 2000 - 500 \cdot x$$

Sección 3

$q = 125 \text{ kp/m}$



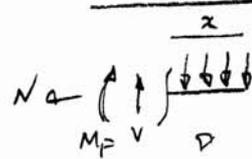
$$N = -500 \text{ kp}$$

$$V = -312.5 - 125 \cdot x$$

$$M_F = 500 \cdot 4 - 1000 \cdot 2 - 312.5x - 125 \frac{x^2}{2}$$

$$M_F = -312.5x - 62.5x^2$$

Sección 4

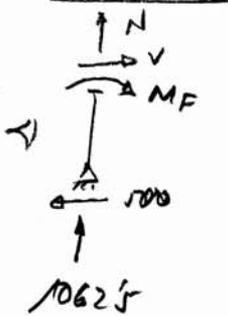


$$N = 0$$

$$V = 125x$$

$$M_F = -125 \frac{x^2}{2} = -62.5x^2$$

Sección 5

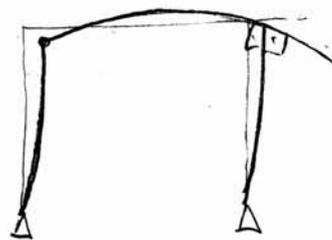
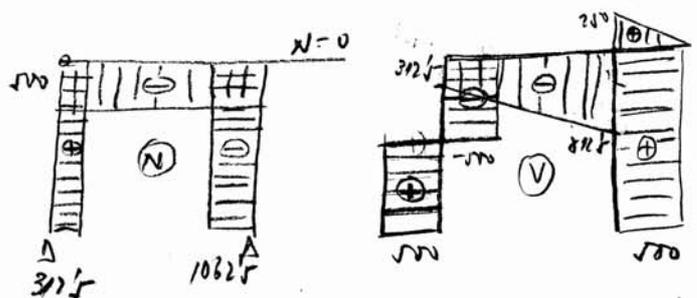
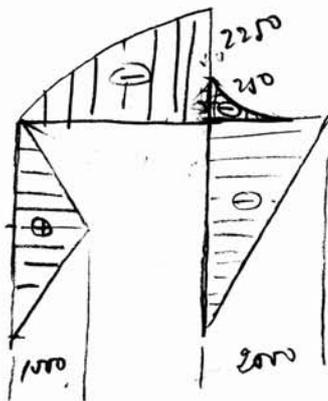


$$N = -1062.5 \text{ kp}$$

$$V = 500 \text{ kp}$$

$$M_F = -500 \cdot x$$

Ahora le pueden hacer los diagramas de sollicitaciones.



definir usada

b) Para dimensionar el perfil nos fijamos en el punto con mayor momento flector que es el punto c del dintel con  $M_c = 2250 \text{ kg}\cdot\text{m}$ . Ahí, además, actúa un esfuerzo normal  $N = -500 \text{ kg}$  de compresión.

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{M_{\text{Fmáx}}}{W} + \sigma_{\text{adm}} \rightarrow W > \frac{M_{\text{Fmáx}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{2250 \cdot 100}{2000} = 112.5 \text{ cm}^3$$

De cara a la flexión sería suficiente con el IPN-160 de  $W = 117 \text{ cm}^3$  y  $A = 22.8 \text{ cm}^2$ . Comprobamos que, incluyendo el esfuerzo normal, no se sobrepasa la tensión admisible.

$$\sigma = \frac{225000}{117} + \frac{500}{22.8} = 1945 \text{ kg/cm}^2$$

Por tanto, aceptamos el IPN-160.

c) Se piden  $q$  y desplazamientos relativos, por tanto, se pueden emplear los teoremas de Mohr.

$$\varphi_{a-b} = \int_0^L \frac{M_F}{EI_z} dx = \int_0^L \frac{62.5x^2}{EI_z} dx = \frac{62.5x^3}{3EI_z} \Big|_0^L = \frac{166.666 \cdot 10^6}{EI_z} \text{ rad}$$

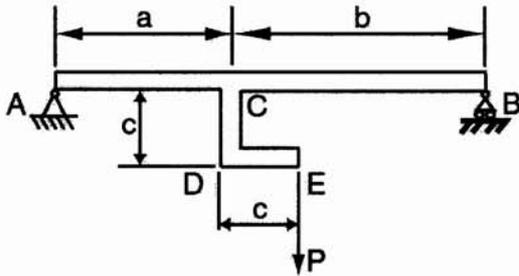
$$\delta_{b-c} = \int_0^L \frac{62.50x^3}{EI_z} dx = \frac{62.50x^4}{4EI_z} \Big|_0^L = \frac{2500 \cdot 10^7}{EI_z} \text{ cm}$$

$$\text{Para } E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \text{ e } I_z = 935 \text{ cm}^4$$

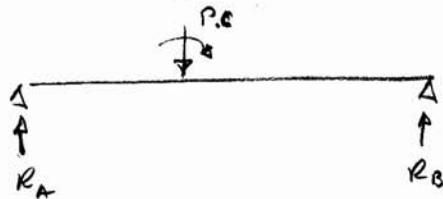
$$\varphi = \frac{166.66 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 \cdot 935} = 0.089 \text{ rad} = 5.10^\circ$$

$$\delta = \frac{2500 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^6 \cdot 935} = 13.36 \text{ cm}$$

1. La viga simplemente apoyada de la figura soporta una carga vertical  $P$  en el punto  $E$  por medio de una ménsula según se indica en la figura. Se pide:
- Reducir la carga en la ménsula a una fuerza y un par aplicados en  $C$ .
  - Dibujar el diagrama de momentos flectores de la viga con el sistema obtenido en el apartado anterior.
  - Para el caso en que  $P=10.000 \text{ kg}$ ,  $a=2 \text{ m}$ ,  $b=3 \text{ m}$  y  $c=1 \text{ m}$ , dimensionar la viga obteniendo el perfil IPN necesario si  $\sigma_{adm}=2.000 \text{ kg/cm}^2$ .
  - Calcular los giros en los apoyos  $A$  y  $B$  de la viga si  $E=2.000.000 \text{ kg/cm}^2$ .



a) Las cargas reducidas a un par y una fuerza, remiten  $P$



b) Para dibujar los diagramas, calculamos las reacciones

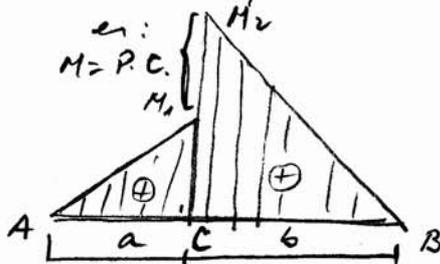
$$\sum F_v = 0 \quad P - R_A - R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot a + P \cdot c - R_B (a+b) = 0$$

$$R_B = \frac{P(a+c)}{a+b}$$

$$R_A = P - R_B = \frac{P(a+b) - P(a+c)}{a+b} = \frac{P(b-c)}{a+b}$$

El diagrama de momentos flectores que remite



$$M_1 = R_A \cdot a = \frac{P a (b-c)}{a+b}$$

$$M_2 = R_B \cdot b = \frac{P b (a+c)}{a+b}$$

Se puede observar que la diferencia en el punto  $C$  es debido al par aplicado,  $P \cdot c$ . el momento máximo es

c) Al particularizar, el momento máximo es

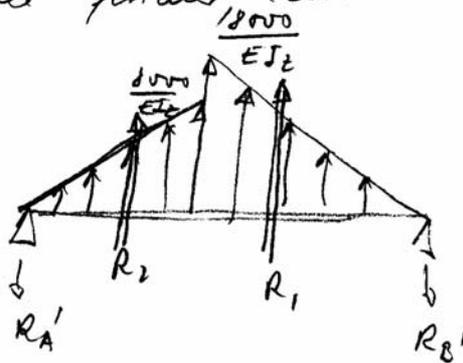
$$M_2 = \frac{10000 \cdot 3 \cdot (2+1)}{2+3} = 18000 \text{ kg} \cdot \text{m} = 1800.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Entonces el módulo resistente debe ser

$$W > \frac{1800.000}{2000} = 900 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Elegimos}$$

$$\text{un IPN-340 cm} \left\{ \begin{array}{l} W_x = 923 \text{ cm}^3 \\ I_x = 15700 \text{ cm}^4 \\ E = 2000000 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$$

d) Para calcular los giros en los apoyos emplearemos el primer teorema de la viga conjugada.



$R_1$  y  $R_2$  son las resultantes de las cargas triangulares y valdrán

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 18000}{EI_2} = \frac{27000}{EI_2}$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 8000}{EI_2} = \frac{8000}{EI_2}$$

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_{A'} = 0 \quad \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot R_2 + \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) R_1 - R_{B'} \cdot 5 = 0$$

$$R_{B'} = \frac{\frac{4}{3} \frac{8000}{EI_2} + 3 \cdot \frac{27000}{EI_2}}{5} = \frac{18333\frac{1}{3}}{EI_2}$$

$$\sum F_v = 0 \quad R_{A'} = R_1 + R_2 - R_{B'} = \frac{27000}{EI_2} + \frac{8000}{EI_2} - \frac{18333\frac{1}{3}}{EI_2}$$

$$R_{A'} = \frac{16666\frac{2}{3}}{EI_2}$$

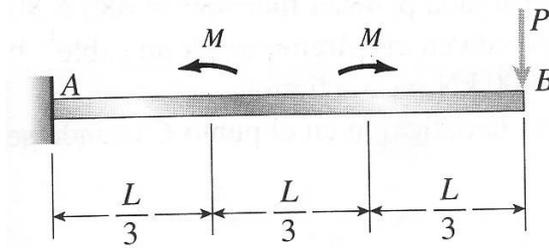
Entonces, los giros en los apoyos son iguales a las constantes en los apoyos de la conjugada.

$$\theta_A = R_{A'} = \frac{16666\frac{2}{3} \times 100}{2 \cdot 10^6 \times 15700} = 5\frac{1}{3} \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_B = R_{B'} = \frac{18333\frac{1}{3} \times 100}{2 \cdot 10^6 \times 15700} = 5\frac{2}{3} \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Diciembre 2004.

Trazar los diagramas de esfuerzos y escoger el perfil HEB más adecuado para la estructura si la tensión admisible es  $\sigma_{adm}=1.000 \text{ Kp/cm}^2$ ,  $L=6 \text{ m}$ ,  $P=2 \text{ Tm}$  y  $M=4 \text{ Tm}\cdot\text{m}$ . Obtener el giro y el desplazamiento del extremo B mediante los teoremas de Mohr.  $E=2\cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .



En primer lugar, calculamos las reacciones en el empotramiento, A. Para trazar los diagramas, estudiaremos a continuación el equilibrio en las tres secciones indicadas.



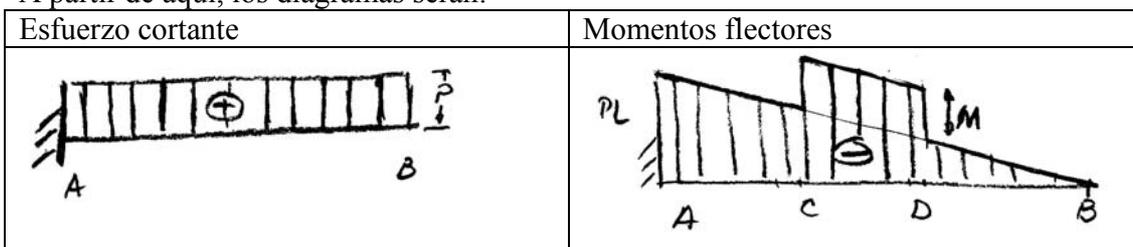
$$\sum M_A = 0 \quad M_A + M - M - P \cdot L = 0$$

$$M_A = P \cdot L$$

$$\sum F_v = 0 \quad R_A = P$$

Sección 1	Sección 2	Sección 3
<p><math>V = P</math> <math>M_F = Px - PL</math></p>	<p><math>V = P</math> <math>M_F = Px - PL - M</math></p>	<p><math>V = P</math> <math>M_F = Px - PL + M - M = Px - PL</math></p>

A partir de aquí, los diagramas serán:



Tanto en la sección A como en la C, el momento flector tiene un valor máximo  $M=12000 \text{ Kg}\cdot\text{m}$ .

Para escoger el perfil HEB, determinamos el valor mínimo del módulo resistente

$$W \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{12000 \cdot 100}{1000} = 1200 \text{ cm}^3$$

Entonces escogemos el perfil HEB 280 con  $W=1380 \text{ cm}^3$  e  $I=19270 \text{ cm}^4$ .

Ahora ya podemos calcular los giros y desplazamientos. Al estar empotrada la viga, podemos calcular el giro del extremo volado como el ángulo que forma su tangente con la del empotramiento. Mediante el primer teorema de Mohr, tendrá el valor del diagrama de momentos flectores entre ambas secciones dividido por  $EI$ .

$$\theta_{B \rightarrow A} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{PL^2}{2} + \frac{ML}{3} \right) = -\frac{0,5 \cdot 2000(600)^2 + 400000 \cdot 200}{2 \cdot 10^6 \cdot 19270} = -0,011 \text{ rad} = -0,65^\circ$$

El signo negativo indica que el giro se produce en el sentido de las agujas del reloj.

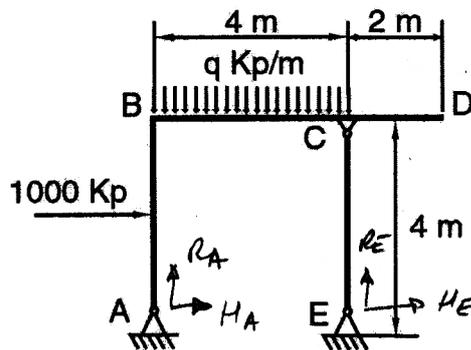
El desplazamiento lo podemos calcular mediante el 2º teorema de Mohr como la distancia de  $B$  a la tangente en  $A$ .

$$\delta_{B \rightarrow \text{tag}A} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{PL^3}{3} + \frac{ML^2}{6} \right) = -\frac{\frac{2000(600)^3}{3} + \frac{400000 \cdot (600)^2}{6}}{2 \cdot 10^6 \cdot 19270} = -4,359 \text{ cm}$$

Febrero 2005

El pórtico de la figura tiene una articulación en el punto C y está sometido a la acción de las cargas indicadas en la figura. En el dintel, entre B y C, actúa una carga uniformemente repartida  $q = 125 \text{ Kp/m}$  y en el punto medio del pilar AB actúa una carga horizontal de  $1000 \text{ Kp}$ . Se pide:

- Dibujar los diagramas acotados de esfuerzo normal, esfuerzo cortante, momento flector y deformada.
- Escoger el perfil IPN más adecuado si  $\sigma_{adm} = 2.000 \text{ kg/cm}^2$ . Se empleará el mismo perfil para toda la estructura, de acero A 42.
- Verificar el pandeo del pilar CE calculando su carga crítica.



Calculamos las reacciones aplicando el equilibrio estático:

$$\sum F_H = 0 \quad 1000 + H_A + H_E = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_V = 0 \quad R_A + R_E - 125 \cdot 4 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad 1000 \cdot 2 + 500 \cdot 2 - R_E \cdot 4 = 0 \quad (3)$$

$$R_E = \frac{3000}{4} = 750 \text{ Kp}$$

$$R_A = 500 - R_E = -250 \text{ Kp} \quad (\text{hacia abajo})$$

Beneficiamos una nueva ecuación que usamos la rótula. La rótula debe estar en equilibrio.

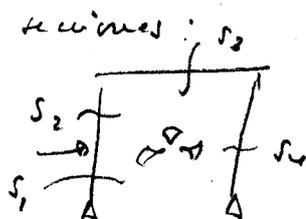
$$\sum M_C = 0 \rightarrow H_E = 0$$

Y entonces, de la ecuación (1)

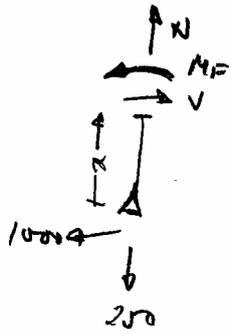
$$H_A = -1000 \text{ Kp} \quad \text{Hacia la izda.}$$

Para obtener los diagramas, estudiaremos los siguientes

El tramo CD, en voladizo, no hay carga y ya lo estudiaremos.

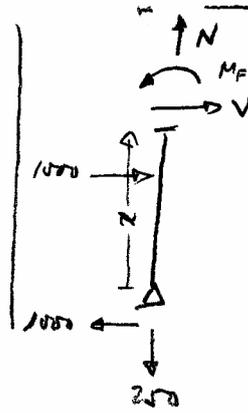


Sección 1



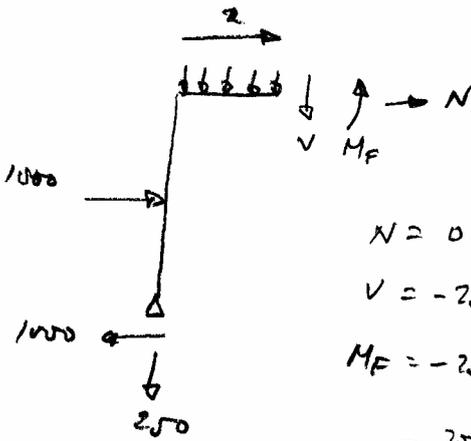
$N = 250 \text{ Kp}$   
 $V = 10000 \text{ Kp}$   
 $M_F = 10000 \cdot x \text{ Kp.m}$

Sección 2



$N = 250 \text{ Kp}$   
 $V = 0$   
 $M_F = 10000 \cdot x - 10000(x-2)$   
 $M_F = 20000 \text{ Kp.m}$

Sección 3



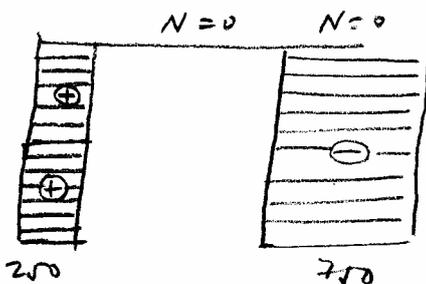
$N = 0$   
 $V = -250 - 125x$   
 $M_F = -250x - 125 \frac{x^2}{2}$   
 $-2000 + 4000$   
 $M_F = 2000 - 250x - 62.5x^2$

Sección 4

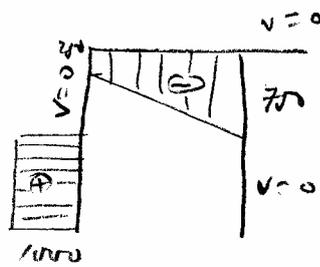


$N = -750 \text{ Kp}$   
 $V = 0$   
 $M_F = 0$

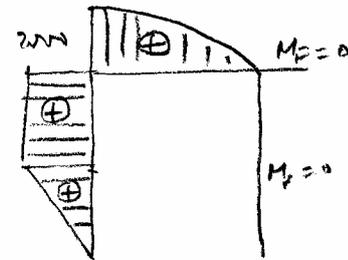
Diagramas



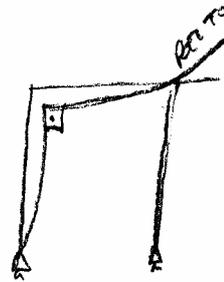
Esfuerzo Normal



Cortantes



Fletores



Deformada aproximada

b) Para escoger un perfil nos fijamos en el punto B en el que se da el Flezor máximo. Comprobaremos que el que también soporta el esfuerzo normal que le produce en el pilar.

$$W > \frac{M_F}{\sigma_{admis}} = \frac{2000 \cdot 100}{2000} = 100 \text{ cm}^3$$

El IPN-160 tiene  $W = 117 \text{ cm}^3$ ,  $A = 22,8 \text{ cm}^2 < i_y = 1,55 \text{ cm}$ .  
Comprobamos las tensiones en el pilar:

$$\sigma = \frac{2000 \cdot 100}{117} + \frac{250}{22,8} = 1720 \text{ kg/cm}^2 \leq \sigma_{admis} \text{ luego vale}$$

Finalmente, comprobamos el pandeo del pilar CE  
Al estar articulado en ambos extremos, la longitud de pandeo es la propia del pilar:

$$L_p = L = 400 \text{ cm.}$$

Elasticidad mecánica

$$\lambda = \frac{L}{i_y} = \frac{400}{1,55} = 258,06$$

Le corresponde una  $w = 10,44$ .

La carga crítica será:

$$P_{cri} = \frac{\sigma_{adm} \cdot A}{w} = \frac{2000 \cdot 22,8}{10,44} = 4367,81 \text{ kp.}$$

No tendría ningún problema para soportar la carga de 700 kp.

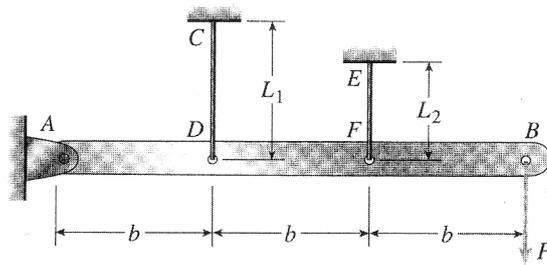
De todas formas, no se admite  $\lambda > 250$ .  
Luego escogemos un perfil mayor, E7 IPN 180  
con  $i_y = 1,71 \text{ cm}$  y  $A = 27,9 \text{ cm}^2$ .

$$\lambda = \frac{400}{1,71} = 233,9 \quad \text{y} \quad w = 9,17$$

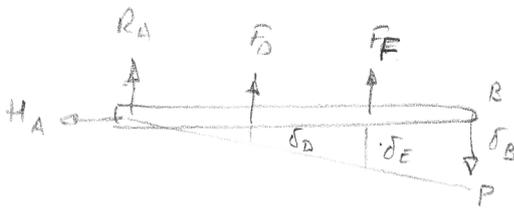
$$P_{cri} = \frac{\sigma_{adm} \cdot A}{w} = \frac{2000 \cdot 27,9}{9,17} = 6085,06 \text{ kp}$$

**Junio 2005 (examen final).**

Una barra  $AB$  rígida horizontal está articulada en el extremo  $A$  y soportada por dos alambres ( $CD$  y  $EF$ ) en los puntos  $D$  y  $F$ . Una carga vertical  $P$  actúa en el extremo  $B$  de la barra. La barra tiene longitud  $3b$  y las longitudes respectivas de los alambres  $CD$  y  $EF$  son  $L_1=0,4\text{ m}$  y  $L_2=0,3\text{ m}$ . Además, el alambre  $CD$  es de aluminio y tiene diámetro  $d_1=4\text{ mm}$  y módulo de elasticidad  $E_1=72\text{ GPa}$ ; el alambre  $EF$  es de magnesio y tiene diámetro  $d_2=3\text{ mm}$  y módulo  $E_2=45\text{ GPa}$ . Determinar el valor de la carga admisible  $P$  si las tensiones admisibles en los alambres  $CD$  y  $EF$  son  $\sigma_1=200\text{ MPa}$  y  $\sigma_2=175\text{ MPa}$ , respectivamente. (El peso de la barra es despreciable).



Inicialmente, aislamos la barra y planteamos el equilibrio estático. Para no introducir ecuaciones de más (no queremos calcular las reacciones en A) sólo planteamos el equilibrio de momentos.



$$\sum M_A = 0 \quad F_D \cdot b + F_E \cdot 2b - P \cdot 3b = 0$$

$$F_D + 2F_E - 3P = 0$$

Por compatibilidad en las deformaciones:

$$\delta_B = 3\delta_D$$

$$2\delta_D = \delta_E \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{F_D L_1}{A_D E_1} = \frac{F_E L_2}{A_E E_2}$$

$$F_D = \frac{1}{2} \frac{A_D E_1}{A_E E_2} \frac{L_2}{L_1} F_E$$

$$F_D = \frac{1}{2} \frac{d_1^2 E_1}{d_2^2 E_2} \frac{L_2}{L_1} F_E$$
 y substituyendo en la ecuación de momentos

$$F_E \left( \frac{1}{2} \frac{d_1^2 E_1}{d_2^2 E_2} \frac{L_2}{L_1} + 2 \right) - 3P = 0$$

$$F_E \left( \frac{1}{2} \frac{0,004^2}{0,003^2} \cdot \frac{72}{45} \cdot \frac{0,3}{0,4} + 2 \right) - 3 \cdot P = 0 \quad F_E = 0,5 \frac{0,004^2}{0,003^2} \cdot \frac{72}{45} \cdot \frac{0,3}{0,4} P$$

$$F_E = \frac{3P}{3,06} = 0,978 P$$

$$F_D = 1,0432 P$$

$$\sigma_1 = \frac{F_D}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{1,0432 P}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \rightarrow P = \frac{\pi d_1^2 \sigma_1}{4,10432} =$$

$$P = \frac{\pi \cdot 0,004^2 \cdot 200 \cdot 10^6}{4,10432} = 2409 \text{ N}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_F}{\frac{\pi d_2^2}{4}} \rightarrow P = \frac{\pi d_2^2 \sigma_2}{4,0,978} = \frac{\pi 0,003^2 \cdot 175 \cdot 10^6}{4,0,978} = 1215 \text{ N}$$

Por tanto, el valor de la carga admisible es

$$\boxed{P_{adm} = 1215 \text{ N}}$$