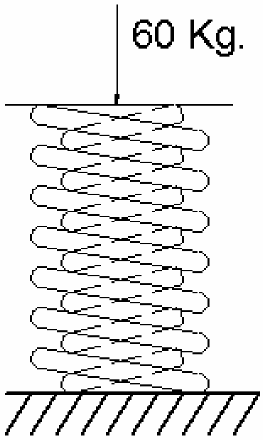
SISTEMAS MECÁNICOS

Septiembre 2001

Dos resortes helicoidales de compresión, ambos de hilo del mismo acero y diámetro del alambre d=1,5 cm y 7 espiras cada uno, escuadradas y rectificadas, tiene la misma longitud (altura). El diámetro medio de cada uno es D_e=10 cm y D_i=7,5 cm. Están montados uno en el interior del otro, según se indica en la figura, y entre dos planos paralelos. El superior es una placa móvil y el plano inferior es el suelo. Si se aplica una carga total de 60 Kg a la placa, calcular:

a) La carga que soportará cada uno de los resortes.
b) La flecha que descenderán (se debe tener en cuenta que ambos deben descender la misma longitud).
c) La tensión total, τ, a la que se ve sometido cada uno de los resortes.

Dato: G=800.000 Kp/cm^2.



La carga aplicada será soportada por los dos resortes, pero el desplazamiento, δ, es el mismo para ambos. Las ecuaciones correspondientes son:

$$F_1 + F_2 = P$$

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 \longrightarrow \delta = \frac{F_1}{K_1} = \frac{F_2}{K_2} \longrightarrow F_1 = \frac{K_1}{K_2} F_2$$

$$F_2\left(1 + \frac{K_1}{K_2}\right) = P \longrightarrow F_2 = \frac{P}{1 + \frac{K_1}{K_2}}$$

Las rigideces de los resortes, se pueden calcular a partir de su fórmula:

$$K_1 = \frac{G d_1^4}{8 D_1^3 Na} = \frac{800.000 \times 1'5^4}{8 \times 10^3 \times 5} = 101'25 \text{ Kp/cm}$$

$$K_2 = \frac{G d_2^4}{8 D_2^3 Na} = \frac{800.000 \times 1'5^4}{8 \times 7'5^3 \times 5} = 240 \text{ Kp/cm}$$

El número de espiras activas, al ser estas escuadradas y rectificadas es:

$$Na = N_t - 2 = 7 - 2 = 5$$

Entonces las fuerzas son:

$$F_2 = \frac{60}{1 + \frac{101'25}{240}} = 42'19 \text{ Kg} \;;\; F_1 = 60 - F_2 = 17'81 \text{ Kg}$$

El desplazamiento

$$\delta = \frac{F_1}{K_1} = \frac{17'81}{101'25} = 0'1759 \text{ cm.}$$

Para calcular las tensiones necesitamos:

a) Los índices de los resortes:

$$c_1 = \frac{D_1}{d_1} = \frac{10}{1'5} = 6'66 \quad y \quad c_2 = \frac{D_2}{d_2} = \frac{7'5}{1'5} = 5$$

b) Los índices de Wahl:

$$K_{W_1} = \frac{4c_1 - 1}{4c_1 - 4} + \frac{0'615}{c_1} = 1'224 \quad y \quad K_{W_2} = 1'31$$

Finalmente las tensiones:

$$\tau_1 = K_{W_1} \frac{8PD_1}{\pi d_1^3} = 1'224 \frac{8 \cdot 17'8 \cdot 10}{\pi \, 1'5^3} = 164'38 \text{ Kg/cm}^2$$

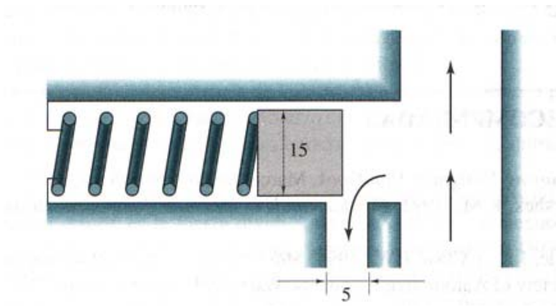
$$\tau_2 = K_{W_2} \frac{8PD_2}{\pi d_2^3} = 1'31 \frac{8 \cdot 42'19 \cdot 7'5}{\pi \, 1'5^3} = 312'75 \text{ Kg/cm}^2$$

Junio 2002

La válvula de escape de la figura, tiene un diámetro de pistón de 15 mm y una longitud de abertura de 5 mm, según se indica en la figura. El resorte tiene un diámetro medio de espira *D*=10 mm y diámetro del alambre *d*=2 mm, y sus extremos están escuadrados y rectificados. La válvula empieza a abrir a una presión de 1 bar y está totalmente abierta a una presión de 3 bares. En esta última situación, el resorte se encuentra totalmente comprimido. Obtener:

a) El número de espiras activas.
b) La longitud del resorte.
c) El esfuerzo cortante máximo al que se encuentra sometido.

Datos: G=80 GPa.



Fórmulas: $$K = \frac{Gd^4}{8D^3 Na}$$

$$K_w = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0,615}{c}$$

1º Calculamos la deformación inicial, x_1.

$$x_2 = 5 + x_1$$

$$F_2 = k x_2 = 3A$$

$$F_1 = k x_1 = A$$

Dividiendo

$$\frac{x_2}{x_1} = 3$$

$$5 + x_1 = 3 x_1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{5}{2} = 2'5 \text{ mm}}$$

2º Calculamos la constante del resorte   1bar = 10^5 Pa

$$k = \frac{PA}{x_1} = \frac{10^5 \pi \left(\frac{0'015}{2}\right)^2}{2'5 \cdot 10^{-3}} = 7068'5 \frac{N}{m}$$

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3 Na} = \frac{80 \cdot 10^9 (2 \times 10^{-3})^4}{8 \cdot (10 \cdot 10^{-3})^3 Na} = 7068'5 = \frac{160000}{Na}$$

$$N_a = \frac{150.000}{7068'5} = 22'6$$

$$N_T = N_a + 2 = 24'6 \qquad h_s = N_T \cdot d = 24'6 \times 2$$

$$L_0 = h_s + 7'5 = 24'6 \times 2 + 7'5 = 56'7 \text{ mm}$$

3.° Esfuerzo cortante máximo.

$$\tau = K_W \frac{8 P_{máx} D}{\pi d^3} = 1'3105 \, \frac{8 \cdot 53'01 \cdot 10 \times 10^{-3}}{\pi \, (2 \times 10^{-3})^3} = 2'21 \times 10^8$$

$$K_W = \frac{4c - 1}{4c - 4} + \frac{0'615}{c} = \frac{20 - 1}{20 - 4} + \frac{0'615}{5} = 1'3105$$

$$c = \frac{D}{d} = \frac{10}{2} = 5$$

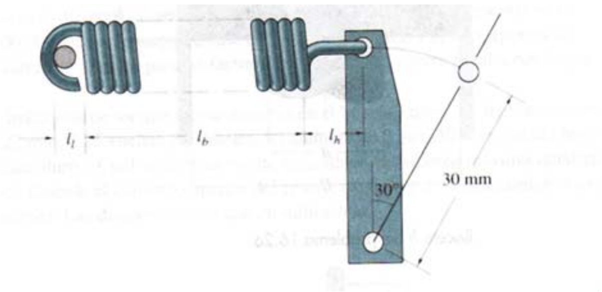
La fuerza máxima $P_{máx}$ es $P = P_{máx} \cdot A = 300.000 \cdot \pi \left(\frac{0'015}{2}\right)^2$

$$P_{máx} = 53'01 \text{ N}$$

$$\boxed{\tau = 2'21 \times 10^8 = 221 \text{ MPa}}$$

Septiembre 2002

El resorte de tracción de la figura se utiliza en un movimiento cíclico para encender y apagar un interruptor de potencia. El resorte tiene un diámetro exterior de 15 mm y es de alambre de 1,5 mm de acero estirado duro. El resorte no tiene precarga. En una carrera completa del resorte la fuerza varía entre 25 y 33 N. Se puede estimar que la carrera corresponde con el arco descrito por el brazo de 30 mm de longitud. Determinar las longitudes máxima y mínima durante la carga cíclica, la rigidez del resorte, el número de espiras y la longitud libre del resorte.



Datos: $G = 11{,}5 \times 10^6\ psi$, $K = \dfrac{Gd^4}{8D^3 Na}$, y se sabe que en resortes de tracción el número de espiras totales es igual al número de espiras activas más una.

Nota: se supone que $\Delta\delta$ es el arco de 30°.

$F_1 = k\,\delta_1 \qquad k = \dfrac{F_1}{\delta_1} = \dfrac{F_2}{\delta_2}$

$F_2 = k\,\delta_2$

$k = \dfrac{G d^4}{8 D^3 Na} \qquad \delta_2 = \delta_1 + \dfrac{\pi}{6} \cdot 0'03 = 0'0157 + \delta_1$

$$\left.\begin{aligned} 25 &= k\,\delta_1 \\ 33 &= k(\delta_1 + 0'0157) \end{aligned}\right\} \quad \delta_1 = \frac{25}{k}$$

$33 = 25 + 0'0157\,k$

$$\boxed{k = \frac{33-25}{0'0157} = 509'5\ \frac{N}{m}}$$

$$\boxed{\delta_1 = \frac{25}{509'5} = 0'049\ m = 49\ mm}$$

$$\boxed{\delta_2 = 0'049 + 0'015 = 0'064\ m = 64\ mm}$$

$$\boxed{Na = \frac{G d^4}{8 D^3 k} = \frac{6894'757 \times 11'5 \times 10^6 \times (0'0015)^4}{8\,(0'015)^3 \cdot 509'5} = 29'1\ \text{espiras}}$$

$$\boxed{N_t = 1 + Na = 30'1\ \text{espiras}}$$

La longitud libre del resorte será la altura sólida más los ganchos.

$L = L_b + D = Na \cdot d + D = 29'1 \times 1'5 + 15 = 58'65\ mm$

Junio 2000

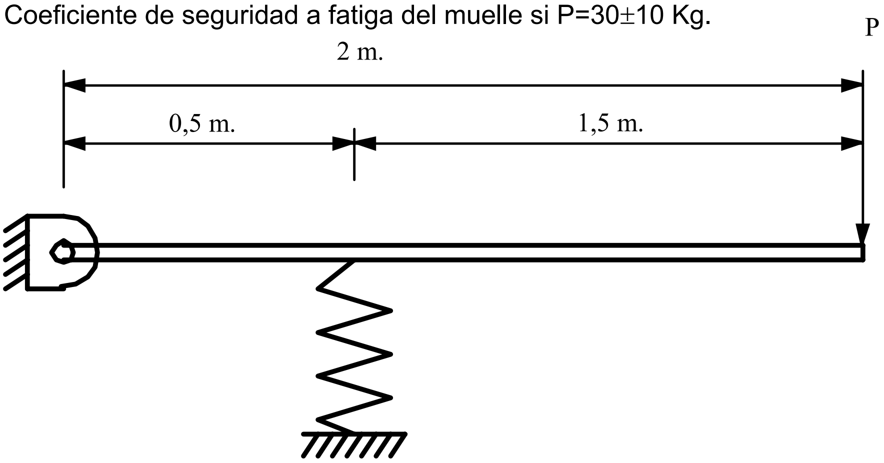
El aparato de la figura es un balancín para niños. La barra se considera rígida y tiene un peso de 14,2 Kg. Esta diseñado para que lo puedan utilizar niños de hasta 8 años con un peso aproximado de 30 Kg. Los datos del resorte son:

- $G=8.050\ Kg/mm^2$.
- $S_T=600$ MPa y $S_{FR}=500$ MPa.
- C=10, d=36 mm., Na=13,28.

Cuando no está sentado el niño, la barra está horizontal y el resorte soportará, únicamente, el peso de la barra y la altura de la barra sobre el suelo es de 0.65 m.

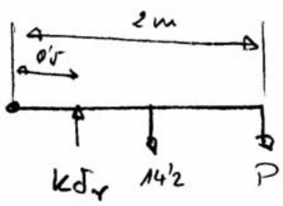
Obtener:

a) Relación entre el peso del niño, P, y el desplazamiento en el extremo de la barra.
b) Tensión de trabajo en el muelle si el niño que se sube está en el límite de las condiciones de funcionamiento.
c) Coeficiente de seguridad a fatiga del muelle si $P=30\pm10$ Kg.



Mediante compatibilidad de desplazamientos se relaciona el movimiento del resorte con el extremo de la barra.

a) $$\frac{\delta_r}{0'5} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \delta_r = 0'5\,\frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{4}$$



Para escribir el desplazamiento en función del peso, imponemos las ecuaciones de la estática $\Sigma \vec{F}_v = \vec{0}$

$$2P + 14'2 - k\delta_r \cdot 0'5 = 0$$

$$P = \frac{\frac{1}{2}k\delta_r - 14'2}{2} = \frac{1}{4}k\delta_r - 7'1 = \frac{1}{16}k\delta - 7'1$$

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3N_a} = \frac{8050\ kg/mm^2 \cdot 36^4\ mm^4}{8\ 360^3\ mm^3 \cdot 13'28} = 2'727\ kg/mm$$

$$P = \frac{1}{16}\, 2'727\,\delta - 7'1 = 0'1704\,\delta - 7'1$$

b) $\tau = K_W \dfrac{8PD}{\pi d^3}$ En este caso el peso del niño será de 30 Kg.

$$K_W = \left(\frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0'615}{c}\right) = \left(\frac{4.10-1}{4.10-4} + \frac{0'615}{10}\right) = \left(\frac{39}{36} + 0'0615\right)$$

$K_W = 1'1448$ Debemos calcular la fuerza que efectúa el resorte, lo hacemos a partir de los desplazamientos

$$30 = 0'1704 . \delta - 7'1$$

$$\delta = \frac{37'1}{0'1704} = 217'72 \text{ mm} \rightarrow \delta_r = \frac{217'72}{4} = 54'43 \text{ mm}$$

$$F_{res} = 2'727 \times 54'43 = 148'43 \text{ Kg}$$

$$\tau = 1'1448 \; \frac{8 . 148'43 . 360}{\pi \; 36^3} = 3'338 \; Kg/mm^2$$

c) $P_{media} = 30$ Kg

$P_{alternada} = 10$ Kg.

$$K_s = 1 + \frac{0'615}{c} = 1'0615$$

$$P_{r\,media} = 148'43 \text{ Kg}$$

$$\tau_m = K_s \frac{8 P_m D}{\pi d^3} = 1'0615 \; \frac{8 . 148'43 . 360}{\pi \; 36^3} = 3'0958 \; Kg/mm^2$$

$$= \frac{3'0958 \text{ Kg} . 9'8 \frac{N}{Kg}}{10^{-6} \frac{m^2}{mm^2}} = 30'339 \text{ MPa}$$

$$P_{r\,alternada} = 2'727\ \mathrm{kg/mm} \times \delta_{r\,alt}\ \mathrm{mm} = 68'41\ \mathrm{kg}$$

$$10 = 0'1704 . \delta - 7'1$$

$$\delta = \frac{17'1}{0'1704} = 100'35\ \mathrm{mm}$$

$$\delta_{ralt} = \frac{\delta}{4} = \frac{100'35}{4} = 25'088\ \mathrm{mm}$$

$$\tau_a = K_W \frac{8 P_a D}{\pi d^3} = 1'1448 \frac{8 . 68'41 . 360}{\pi\ 36^3} = 1'5388\ \mathrm{kg/mm^2} = 15'08\ \mathrm{MPa}$$

Como $\tau_m > \tau_a$

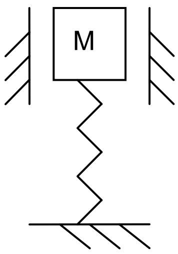
$$\frac{\tau_m - \tau_a}{S_T} + \frac{2\,\tau_a}{S_{FR}} = \frac{1}{C_s}$$

$$\frac{30'339 - 15'08}{600} + \frac{2 \times 15'08}{500} = \frac{1}{C_s}$$

$$0'08575 = \frac{1}{C_s} \Rightarrow \boxed{C_s = \frac{1}{0'08575} = 11'66}$$

Junio 2003

1. El resorte de la figura tiene un diámetro d=6mm y soporta una masa M=100±25 Kg. Está fabricado con acero ASTM A230 de módulo de Poisson ν=0,3, E=2.100.000 Kg/cm^2, G=800.000 Kg/cm^2 y tiene un índice de resorte c=6. Se pide:
   a) Verificar su resistencia a fatiga calculando el coeficiente de seguridad con el que está trabajando.
   b) Verificar su resistencia a pandeo si se sabe que el resorte tiene en total 20 espiras y sus extremos están escuadrados y rectificados.



Fórmulas:

$$I_{eq} = \frac{Ld^4}{64DNa\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \qquad K_W = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0{,}615}{c}$$

$$Ks = 1 + \frac{0{,}615}{c} \qquad K = \frac{Gd^4}{8D^3Na}$$

Para verificar la resistencia, calculamos el coeficiente de seguridad. Para eso necesitamos los valores de la tensión media y alternada.

La carga media es $P_m = 100$ kg y la alternada $P_a = 25$ kg.

$$K_S = 1 + \frac{0'615}{6} = 1'1025$$

$$K_W = \frac{4.6-1}{4.6-4} + \frac{0'615}{6} = 1'2525$$

Entonces las tensiones son

$$\tau_m = K_S \frac{8 P_m c}{\pi d^2} = 1'1025 \frac{8.100.6}{\pi d^2} = 46'8 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\tau_a = K_W \frac{8 P_a c}{\pi d^2} = 1'2525 \frac{8.100.6}{\pi d^2} = 13'28 \text{ Kg/mm}^2$$

Claramente $\tau_m > \tau_a$ luego empleamos la expresión

$$\frac{\tau_m - \tau_a}{S_T} + \frac{2\tau_a}{S_{FR}} = \frac{1}{C_S}$$

Calculamos los valores de las resistencias para el A230

$$S_T = 0'5\, S_R = 0'5 \cdot \frac{176}{d^{0'1}} = \frac{88}{6^{0'1}} = 73'5 \text{ Kg/mm}^2$$

$$S_{FR} = \frac{55'7}{d^{0'15}} = 42'57 \text{ Kg/mm}^2$$

Sustituyendo en la expresión

$$\frac{46'8 - 13'28}{73'5} + \frac{2 \cdot 13'28}{42'57} = 1'079 \Rightarrow C_s = 0'926$$

Por tanto, no resistiría a fatiga y habría que aumentar el diámetro del alambre.

b) Para la configuración de la figura sabemos que la carga crítica es:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 E I_{eq}}{L^2}$$

Debemos calcular la longitud del resorte

$$L = h_t + \frac{P}{K} = 20.6 + \frac{125}{1'54} = 201'16 \text{ mm}$$

La rigidez

$$K = \frac{8000 \cdot 6^4}{8 \cdot 36^3 \cdot 18} = 1'54 \text{ Kp/mm}$$

El número de espiras activas y el momento equivalente

$$N_a = N_t - 2 = 18$$

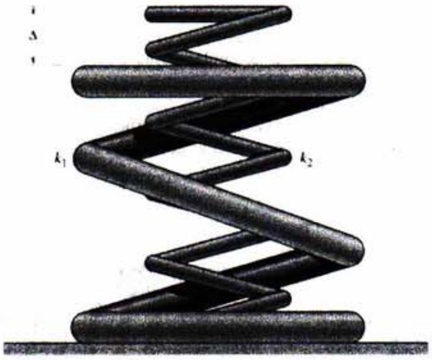
$$I_{eq} = \frac{201'16 \cdot 6^4}{64 \cdot 36 \cdot 18 \left(1 + \frac{0'3}{2}\right)} = 5'46 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 \, 21.000 \cdot 5'46}{201'16^2} = 111'8 \text{ Kg}$$

Luego también pandearía con la carga máxima de 125 Kg.

Septiembre 2003

Dos resortes helicoidales de rigidez k_1 y k_2 están montados uno dentro del otro según se muestra en la figura. Si ambos están en reposo, sin esforzar, la diferencia de longitudes entre ellos es Δ. Se instala un dispositivo de sujeción en la parte superior de los resortes, de tal manera que se deforman y se hacen de igual longitud. Se pide obtener las fuerzas en los dos resortes si en ambos c=7, el número de espiras totales es $N_{t1}=3$, $N_{t2}=6$, ambos resortes están escuadrados, $d_1=4$ mm, $d_2=2$ mm y G=800.000 Kg/cm^2 y $\Delta=10$ cm.
Si posteriormente se monta una carga de 100 Kg sobre el conjunto, ¿cuál será la distribución de fuerzas y desplazamientos en los resortes?



Fórmulas: $K = \dfrac{Gd^4}{8D^3Na}$.

En primer lugar, a partir de los datos del problema, determinamos las constantes de rigidez de los muelles.
– Al estar escuadrados, el número de espiras activas se calcula como:

$$Na = N_t - 1'5$$

Entonces

$$Na_1 = N_{t_1} - 1'5 = 3 - 1'5 = 1'5$$
$$Na_2 = N_{t_2} - 1'5 = 6 - 1'5 = 4'5$$

Si el índice de los resortes es $c = 7$, los diámetros de arrollamiento son:

$$D_1 = c \cdot d_1 = 7 \cdot 4 = 28 \text{ mm} = 2'8 \text{ cm}$$
$$D_2 = c \cdot d_2 = 7 \cdot 2 = 14 \text{ mm} = 1'4 \text{ cm}$$

Finalmente, las constantes de los resortes:

$$K_1 = \frac{G d_1^4}{8 D_1^3 Na} = \frac{800.000 \times 0'4^4}{8 \times 2'8^3 \times 1'5} = 77'7 \text{ kg/cm}$$

$$K_2 = \frac{G d_2^4}{8 D_2^3 Na} = \frac{800.000 \times 0'2^4}{8 \times 1'4^3 \times 4'5} = 12'9 \text{ kg/cm}$$

a) En el primer apartado, el muelle 1 se alargará una distancia δ_1, y el muelle 2 se comprime δ_2, de tal forma que

$$\delta_1 + \delta_2 = \Delta . \qquad (1)$$

Además, en ese instante las fuerzas de ambos resortes deben estar en equilibrio, uno a tracción (el 1) y el otro a compresión (el 2).

F_1

F_2

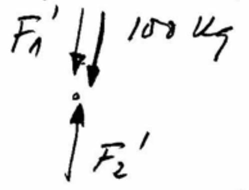
$$-F_1 + F_2 = 0$$
$$F_1 = F_2$$
$$K_1 \delta_1 = K_2 \delta_2 \quad (2) \longrightarrow \delta_2 = \frac{K_1 \delta_1}{K_2}$$

Entonces $\delta_1 + \frac{k_1 \delta_1}{k_2} = \Delta \rightarrow \delta_1 = \frac{k_2 \Delta}{k_1 + k_2} = 1'423$ cm

$\delta_2 = k_1 \frac{\delta_1}{k_2} = 8'571$ cm

Y la fuerza, común en ambos muelles $F = K_1 \delta_1 = 110'56$ Kg

b) Para la nueva posición de equilibrio, suponemos que el muelle 1 sigue traccionado y el 2 comprimido, de forma que:



$\rightarrow 100 + F_1' = F_2'$

Además, ambos muelles, a partir de la anterior posición de equilibrio, descenderán una longitud δ.

$$\delta_1' = \delta_1 - \delta \quad y \quad F_1' = k_1\delta_1 - k_1 \delta$$
$$\delta_2' = \delta_2 + \delta \quad y \quad F_2' = k_2 \delta_2 + k_2 \delta$$

Entonces, la ecuación de equilibrio queda como:

$$100 + \cancel{k_1 \delta_1} - k_1 \delta = \cancel{k_2 \delta_2} + k_2 \delta$$

$$\delta = \frac{100}{k_2 + k_1} = \frac{100}{12'9 + 77'7} = 1'103 \text{ cm.}$$

Y la nueva distribución de fuerzas, resulta

$$F_1' = k_1 (\delta_1 - \delta) = 77'7 (1'423 - 1'103) = 24'8 \text{ Kg}$$

$$F_2' = k_2 (\delta_2 - \delta) = 12'9 (8'571 + 1'103) = 124'8 \text{ Kg}$$

Diciembre 2002 y 2003.

Dos resortes helicoidales de compresión, ambos de hilo del mismo acero y diámetro del alambre d=1,5 cm y 4 espiras cada uno, escuadradas y rectificadas, tiene la misma longitud (altura). El diámetro medio de cada uno es D_e=10 cm y D_i=7,5 cm. Están montados uno en el interior del otro, según se indica en la figura, y entre dos planos paralelos. El superior es una placa móvil y el plano inferior es el suelo. Si se aplica una carga total de P=60 Kg a la placa, calcular:

a) La carga que soportará cada uno de los resortes.
b) La flecha que descenderán (se debe tener en cuenta que ambos deben descender la misma longitud).
c) La tensión total, τ, a la que se ve sometido cada uno de los resortes.

Datos: G=800.000 Kp/cm², $K = \dfrac{Gd^4}{8D^3Na}$.

a) Primero calculamos las constantes de cada uno de los resortes.

$$K_i = \frac{800.000 \times 1'5^4}{8 \times 7'5^3 \times 2} = 600 \text{ Kg/cm}$$

$$Na = 4 - 2 = 2$$

$$K_e = \frac{800.000 \times 1'5^4}{8 \times 10^3 \times 2} = 253'125 \text{ Kg/cm}$$

En el equilibrio de fuerzas ambos resortes se habrán comprimido una distancia δ

$$\delta = \frac{F_i}{K_i} = \frac{F_e}{K_e} \longrightarrow F_i = \frac{K_i}{K_e} F_e$$

Y entre ambos soportan la carga exterior, P.

$$P = F_i + F_e = F_e\left(1 + \frac{K_i}{K_e}\right)$$

$$\boxed{F_e = \frac{P}{1 + \frac{K_i}{K_e}} = \frac{60}{1 + \frac{600}{253'125}} = 17'8 \text{ Kg}}$$

$$\boxed{F_i = 60 - 17'8 = 42'2 \text{ Kg}}$$

b) La flecha

$$\delta = \frac{F_i}{K_i} = \frac{42'2}{600} = 0'07 \text{ cm.}$$

c) La carga se aplica en condiciones estáticas

$$\tau = K_W \frac{8PD}{\pi d^3}$$

<u>Resorte interior</u> $\quad c = \frac{7'5}{1'5} = 5$

$$K_W = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0'615}{c} = \frac{19}{16} + \frac{0'615}{5} = 1'3105$$

$$\tau = 1'3105 \frac{8 \times 42'2 \times 7'5}{\pi\, 1'5^3} = 312'95 \text{ kg/cm}^2$$

<u>Resorte exterior</u> $\quad c = \frac{10}{1'5} = 6'6$

$$K_W = \frac{25'4}{22'4} + \frac{0'615}{6'6} = 1'227$$

$$\tau = 1'227 \frac{8 \times 17'8 \times 10}{\pi\, 1'5^3} = 164'8 \text{ kg/cm}^2$$

Septiembre 2004

Un vehículo tiene una suspensión independiente en las ruedas en forma de resortes helicoidales. La longitud del resorte es 360 *mm*, y la altura sólida 160 *mm*, bajo una fuerza de compresión de 5.000 *N*. El módulo de cortante del material del resorte es G=80 *GPa* y el índice del resorte es c=9. Los extremos del resorte están escuadrados y rectificados. Calcular el número de espiras activas, Na, el diámetro del alambre, d, y el del arrollamiento, D. Obtener el valor del esfuerzo cortante máximo al que se ve sometido, $\tau_{máx}$.

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3Na}$$

Comenzamos escribiendo las ecuaciones que se deducen del texto.

- Extremos escuadrados y rectificados

$$N_t = Na + 2 \qquad (1)$$

- Altura sólida

$$h_s = N_t \cdot d = 160 \text{ mm} \rightarrow N_t = \frac{160}{d} \qquad (2)$$

- Índice del resorte

$$c = \frac{D}{d} = 9 \qquad (3)$$

- El resorte está totalmente comprimido bajo una carga de 5000 N. No se habla de precarga, entonces

$$F = k \cdot \delta \Rightarrow 5000 = k\,(360 - 160)$$

$$k = \frac{5000 \text{ N}}{200 \text{ mm}} = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \qquad (4)$$

- Ahora, introduciendo estas ecuaciones y valores en la ecuación de la rigidez, k, llegamos a una ecuación de segundo grado en la que d es la única incógnita:

$$k = \frac{G d^4}{8 D^3 Na} = \frac{G d}{8 \left(\frac{D}{d}\right)^3 (N_t - 2)} = \frac{G d}{8 c^3 \left(\frac{160}{d} - 2\right)}$$

Operando

$$8c^3 k \frac{160}{d} - 16 k c^3 - G d = 0$$

$$G d^2 + 16 k c^3 d - 8 c^3 k \cdot 160 = 0$$

$$d^2 + 3'645 d - 291'6 = 0$$

Cuya única solución positiva es $d = 15'35$ mm

Ahora, basta con volver hacia atrás

$$N_t = \frac{160}{d} = \frac{160\ mm}{15'35\ mm} = 10'4$$

$$N_a = N_t - 2 = 8'4$$

$$D = 9 \cdot d = 9 \times 15'35 = 138'15\ mm$$

El esfuerzo cortante máximo se obtendrá bajo la carga máxima de 5000 N y será:

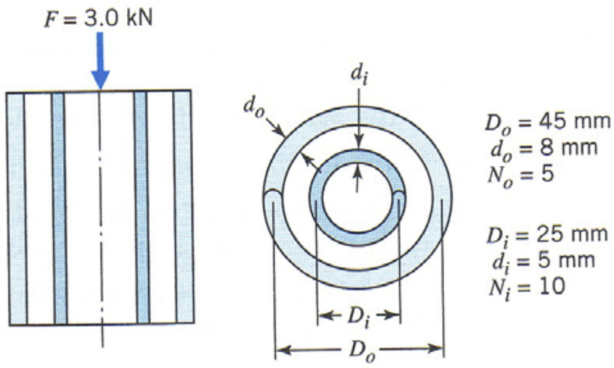
$$\tau_{máx} = K_W \cdot \frac{8PD}{\pi d^3} = 1'162 \cdot \frac{8 \cdot 5000\,(N) \cdot 138'15\,(mm)}{\pi\ 15'35^3\ (mm^3)} = 565'12\ \frac{N}{mm^2}$$

$$K_W = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0'615}{c} = \frac{4\times 9-1}{4\times 9-4} + \frac{0'615}{9} = 1'162$$

Diciembre 2004.

Una máquina emplea un par de muelles helicoidales concéntricos para soportar una carga estática de 3 kN. Ambos resortes están fabricados en acero y tienen la misma longitud. Las dimensiones de ambos son las indicadas en la figura, en la que N es el número de espiras activas.

a) Calcular la deflexión que experimentan bajo la carga de 3 kN, así como la tensión en cada uno de los muelles bajo esa carga.
b) Hallar el coeficiente de seguridad en el muelle exterior si la carga oscila entre 0 y 3 kN.



Datos: G=800.000 Kp/cm^2, $K = \dfrac{Gd^4}{8D^3Na}$, Resistencia a la deformación permanente S_T=600 MPa y Resistencia a la Fatiga Repetida S_{FR}=500 MPa.

Apartado a)

El sistema funciona de tal manera que el desplazamiento debe ser el mismo en ambos muelles y la suma de las fuerzas de los muelles debe ser igual a la fuerza exterior que soporta. Esto nos proporciona las siguientes ecuaciones:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$
$$F_1 = k_1 \cdot \delta$$
$$F_2 = k_2 \cdot \delta$$
$$F_1 + F_2 = 3\,kN$$

De esta manera, se puede reescribir la última ecuación dependiendo únicamente de δ y las rigideces de los muelles que las podemos calcular mediante su expresión.

$$\delta = \frac{3000}{9,8 \cdot (k_1 + k_2)} = \frac{3000}{9,8 \cdot (89,89 + 40)} = 2,356\,cm.$$

$$k_1 = \frac{Gd_1^4}{8D_1^3 Na} = \frac{800000 \cdot 0,8^4}{8 \cdot 4,5^3 \cdot 5} = 89,89\ kg/cm$$

$$k_2 = \frac{Gd_2^4}{8D_2^3 Na} = \frac{800000 \cdot 0,5^4}{8 \cdot 2,5^3 \cdot 10} = 40\ kg/cm$$

Una vez obtenido el desplazamiento podemos calcular las fuerzas en los muelles

$$F_1 = k_1 \cdot \delta = 89,89 \cdot 2,356 = 211,78\,kg$$

$$F_2 = k_2 \cdot \delta = 40 \cdot 2,356 = 94,24\,kg$$

Apartado b)
Para estos valores de la oscilación de la carga, habrá un reparto entre ambos muelles de forma que:

$$Pm_1 = 105{,}89\ kg \quad Pa_1 = 105{,}89\ kg$$
$$Pm_2 = 47{,}12\ kg \quad Pa_2 = 47{,}12\ kg$$

Para calcular las tensiones media y alternada debemos calcular los factores k_s y k_w de ambos muelles:

$$c_1 = \frac{D_1}{d_1} = \frac{45}{8} = 5{,}625 \quad k_{s1} = 1 + \frac{0{,}615}{c_1} = 1{,}109 \quad k_{w1} = \frac{4c_1 - 1}{4c_1 - 4} + \frac{0{,}615}{c_1} = 1{,}271$$
$$c_2 = \frac{D_2}{d_2} = \frac{25}{5} = 5 \quad k_{s2} = 1 + \frac{0{,}615}{c_2} = 1{,}123 \quad k_{w2} = \frac{4c_2 - 1}{4c_2 - 4} + \frac{0{,}615}{c_2} = 1{,}3105$$

Ahora ya podemos calcular las tensiones en cada uno de los resortes y su coeficiente de seguridad.
Resorte 1

$$\tau_m = k_s \frac{8P_m D}{\pi d^3} = 1{,}109 \frac{8 \cdot 105{,}89 \cdot 4{,}5}{\pi \cdot 0{,}8^3} = 2\,628{,}25\ {kg}/{cm^2}$$
$$\tau_a = k_w \frac{8P_a D}{\pi d^3} = 1{,}271 \frac{8 \cdot 105{,}89 \cdot 4{,}5}{\pi \cdot 0{,}8^3} = 3012{,}17\ {kg}/{cm^2}$$

Al ser la tensión alternada mayor, calculamos el coeficiente de seguridad de la siguiente manera:

$$\frac{1}{cs} = \frac{2\tau_a}{S_{FR}} \quad cs = \frac{S_{FR}}{2\tau_a} = \frac{5000}{2 \cdot 3012{,}17} = 0{,}829$$

Luego fallaría por fatiga.

Resorte 2

$$\tau_m = k_s \frac{8P_m D}{\pi d^3} = 1{,}123 \frac{8 \cdot 47{,}12 \cdot 2{,}5}{\pi \cdot 0{,}5^3} = 2\,694{,}96\ {kg}/{cm^2}$$
$$\tau_a = k_w \frac{8P_a D}{\pi d^3} = 1{,}3105 \frac{8 \cdot 40{,}27 \cdot 2{,}5}{\pi \cdot 0{,}5^3} = 3144{,}92\ {kg}/{cm^2}$$

Al ser la tensión alternada mayor, calculamos el coeficiente de seguridad de la siguiente manera:

$$\frac{1}{cs} = \frac{2\tau_a}{S_{FR}} \quad cs = \frac{S_{FR}}{2\tau_a} = \frac{5000}{2 \cdot 3144{,}92} = 0{,}79$$

Con lo cual, también fallaría por fatiga.

1. Diseñar un resorte helicoidal de extremos escuadrados y rectificados para ejercer una fuerza de 25 kg con una longitud de 6,5 cm y 50 kg para una longitud 1,25 cm más corta. La carga es estática y la tensión admisible es τ_{adm}=750 MPa. Tómese como índice del resorte es c=7. Se dará al resorte una precarga del 10%. Determinar: la rigidez del resorte, la fuerza necesaria para reducir el resorte a la altura sólida, el diámetro del alambre y el del arrollamiento, el número de espiras activas y totales

Dar la fórmula de la k.

$\Delta F = k\Delta\delta$

$25\ Kg = k \cdot 1{,}25\ cm \qquad k = \frac{25}{1{,}25} = 20\ Kg/cm$

Con esa rigidez, bajo la fuerza de 50 se habrá deformado

$$\delta_0 = \frac{F}{k} = \frac{50}{20} = 2{,}5\ cm$$

Dando una precarga del 10%, tiene falta desplazar el resorte un 10% más (0,25 cm) para alcanzar la altura sólida. Por tanto, al llegar a la altura sólida el resorte se habrá contraído:

$$\delta_{total} = 2{,}5 + 0{,}25 = 2{,}75\ cm$$

La fuerza necesaria para producir esa deformación es

$$F_{máx} = k \cdot \delta_{total} = 20 \cdot 2{,}75 = 55\ Kg$$

El índice de Wahl del resorte es:

$$K_W = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0{,}615}{c} = \frac{27}{24} + \frac{0{,}615}{7} = 1{,}212$$

Entonces para que se alcance la tensión máxima admisible bajo la carga máxima, el diámetro será:

$$\tau_{máx} = K_W \frac{8Pc}{\pi d^2} \leq \tau_{adm} \Rightarrow d^2 = K_W \frac{8Pc}{\pi \tau_{máx}} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{K_W \frac{8 \cdot 55 \cdot 9{,}81 \cdot 7}{\pi\, 750 \cdot 10^6}} = 3{,}94 \cdot 10^{-3} m = 3{,}94\ mm$$

Y el diámetro del arrollamiento

$D = c \cdot d = 27{,}59\ mm$

De la fórmula de la rigidez obtenemos N_a

$$N_a = \frac{G d^4}{8 D^3 k} = \frac{800{,}000 \cdot (0{,}394)}{8\,(2{,}759)^3 \quad 20} = 5{,}73 \text{ espiras}$$

Al tener extremos escuadrados y rectificados

$$N_t = N_a + 2 = 7{,}73$$