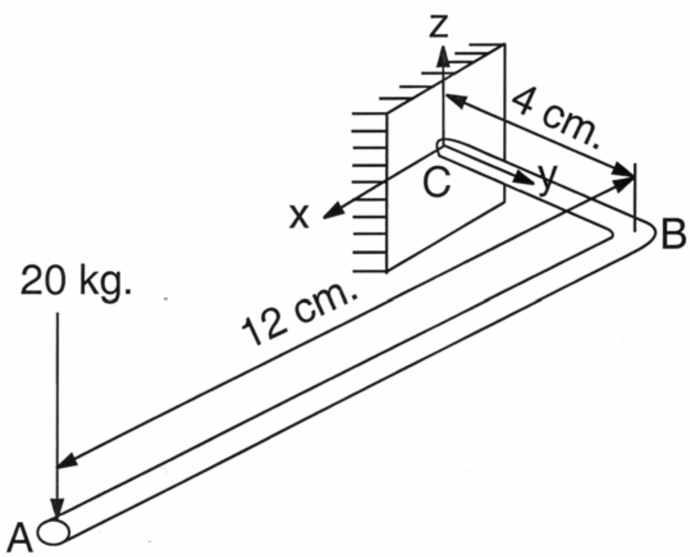
SISTEMAS MECÁNICOS

Febrero 2000 (examen parcial).
Problema 3

Determinar el desplazamiento vertical del punto A de la estructura de la figura cuando se aplica una fuerza de 20 kg. según se indica.
Datos:

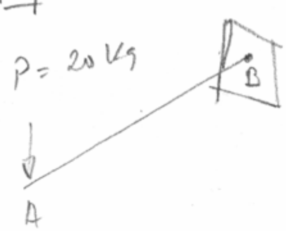
- $E=35.200\ kg/cm^2$.
- $G=14.100\ kg/cm^2$.
- $I_o=0,927\ cm^4$.
- $I_x=I_y=I_z=0,463\ cm^4$.



Una posibilidad es resolver el ejercicio aplicando el principio de superposición de esfuerzos. De esta manera podemos estudiar el tramo AB por un lado, como si se tratase de una viga empotrada en un extremo y con el otro en voladizo, y por otro lado el tramo BC.

$\boxed{1}$

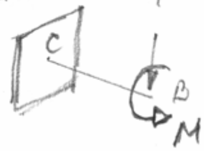
$P = 20$ Kg



\+

$\boxed{2}$

$P = 20$ Kg



$M = 20 \cdot 12 = 240$ Kg cm

La carga $P = 20$ Kg produce en el punto B un momento.

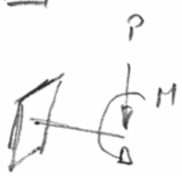
Ahora se pueden estudiar las deformaciones en $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ independientemente.

$\boxed{1}$

Este problema se trata de una viga en voladizo con una carga en punta. Su resolución se ha estudiado en la Teoría por distintos procedimientos. Se sabe que el desplazamiento de A será:

$$\delta_A = \frac{PL^3}{3EI_z} = \frac{20 \times 12^3}{3 \times 35200 \times 0'463} = -0'7068\,\vec{k} \text{ cm.}$$

$\boxed{2}$



Aquí, nuevamente, debido a la carga en punta, el punto B se desplazará

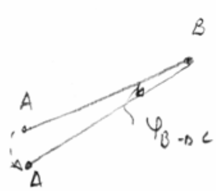
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI_z} = \frac{20 \times 4^3}{3 \times 35200 \times 0'463} = -0'026\,\vec{k} \text{ cm}$$

El momento M actúa como un momento torsor que provocará un giro de la sección B respecto al empotramiento C

$$\varphi_{B \to C} = \frac{Ml}{GI_0} = \frac{240 \times 4}{14{,}100 \times 0{,}927} = 0'073 \text{ rad.}$$

Este giro de la sección B tiene como consecuencia que toda la barra AB gire solidariamente con B. Así, el punto A descenderá nuevamente

$$\delta_A = \varphi_B \cdot l = 0'073 \cdot 12 = -0'882\,\vec{k} \text{ cm.}$$



Finalmente, el descenso total de A será la suma de:

- El δ_A calculado en $\boxed{1}$
- El descenso del punto B, δ_B, de $\boxed{2}$
- El descenso de A debido al giro de B.

$$\boxed{\delta_{A\,Total} = -0'706 - 0'026 - 0'882 = -1'614\,\vec{k} \text{ cm}}$$

Marzo 2002 (examen parcial).
Problema 3

La barra de la figura está sometida a la acción de las fuerzas F=0.55 kN, P=8 kN y al par torsor T=30 N.m. Se pide:

a) Obtener las tensiones normales, σ, y tangenciales, τ, en los puntos A y B de la sección del empotramiento.

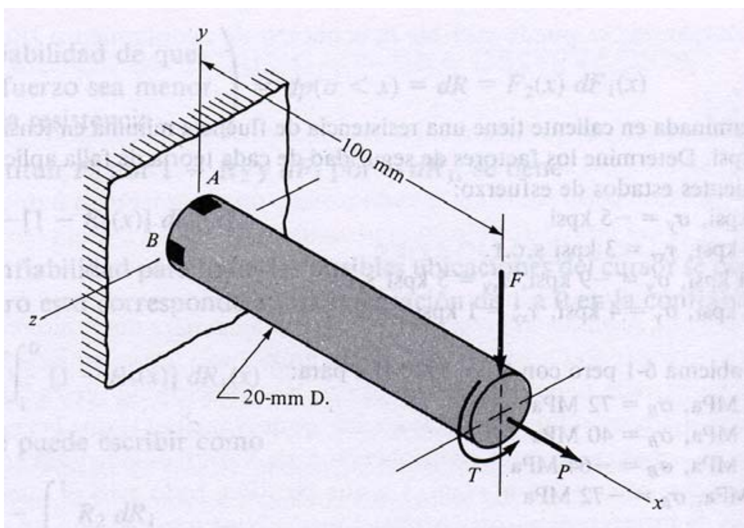
b) Calcular el desplazamiento longitudinal, δ_H, debido a la fuerza P, en el extremo libre de la barra. Se recomienda aplicar la ley de Hooke.

c) Calcular el desplazamiento vertical, δ_V, debido a la fuerza F, en el extremo libre de la barra. Se recomienda aplicar los teoremas de Mohr.

d) Calcular el giro, θ, del extremo libre de la barra debido al par torsor T.

Datos:

- $E=2 \cdot 10^6$ kg/cm^2.
- $G=0,75 \cdot 10^6$ kg/cm^2.
- $I_o=1,57$ cm^4.
- $I_x=I_y=I_z=0,785$ cm^4.



a) Según se ha visto en la teoría, la fuerza F produce un esfuerzo cortante y un momento flector que tendrá, en la sección del empotramiento el valor $M_F = F.L$.
La fuerza P produce únicamente esfuerzo axial y el momento T es un momento torsor que dará origen a tensiones cortantes.

Analizando cada punto tenemos:

Punto A

- Debido al esfuerzo normal

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{8000}{\pi\, 0'01^2} = 25464790 \text{ Pa} \simeq 25'5 \text{ MPa}$$

- Debido a la fuerza F

$$\sigma_2 = \frac{M_F . R}{I_z} = \frac{0'55 \times 10^3 . 0'1 . 0'01}{0'785 \times 10^{-8}} = 70063694 \text{ Pa} \simeq 70 \text{ MPa}$$

Además en la fibra correspondiente al punto A esa tensión es de tracción por lo que se sumará con la del esfuerzo normal.

El cortante que produce

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{550}{\pi 0'01^2} = 1750704 \text{ Pa} = 1'75 \text{ MPa}$$

Se puede observar que es prácticamente despreciable frente a los otros valores que hemos obtenido para las tensiones.

- Debido al momento T

$$\tau = \frac{T . R}{I_0} = \frac{30 . 0'01}{1'57 \times 10^{-8}} = 19.108.280 \text{ Pa} = 19'1 \text{ MPa}$$

En definitiva el total de las tensiones (despreciando el cortante debido a F) será

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 25'5 + 70 = 95'5 \text{ MPa}$$

$$\tau = 19'1 \text{ MPa}$$

Punto B

- Lo único que varía respecto al punto A es la tensión debida al flector. Al ser la ley de Navier $\sigma = \frac{M_F . y}{I_z}$, donde y es la distancia a la línea neutra, como el punto B está situado en la línea neutra no es sometido a tensión por el flector. Entonces, $\sigma_2 = 0$ y

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 25'5 + 0 = 25'5 \text{ MPa}$$

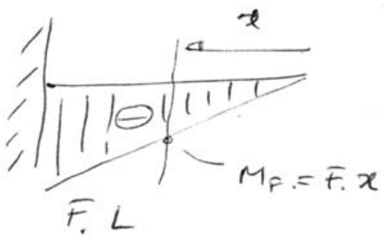
$$\tau = 19'1 \text{ MPa}$$

b) El desplazamiento longitudinal debido a P, mediante la ley de Hooke es:

$$\delta_H = \frac{PL}{AE} = \frac{(8000 \div 9'81)\,\text{Kg}.10\ \text{cm}}{\pi\, 0'1^2 \times 2.10^6} = 0'127\ \text{cm}.$$

c) El desplazamiento vertical lo podemos calcular mediante el 2º T^ma de Mohr.

$$\delta_V = \int_0^L \frac{Fx.x}{EI_z}\,dx = \int_0^L \frac{Fx^2}{EI_z} = \frac{FL^3}{3EI_z}$$



Nos apoyamos en que la tangente en el empotramiento permanece inalterable.

$$\delta_V = \frac{(550 \div 10)\,10^3}{3.\,2.10^6.\,0'785} = 0'011\ \text{cm}.$$

d) El giro θ según se ha visto en la teoría se puede calcular como:

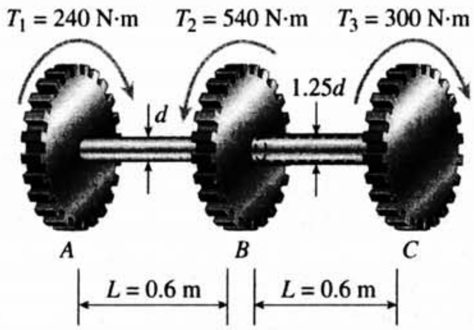
$$\theta = \frac{M_t.\,L}{G I_0} = \frac{T.\,l}{G I_0} = \frac{(30 \div 10).10^2.10}{0'75.10^6.\,1'57} = 0'00254\ \text{rad}.$$

Marzo 2003 (examen parcial)

El eje *ABC* de la figura consiste en una barra sólida de diámetro *d* de *A* a *B* y en una barra hueca de diámetro exterior de *1.25d* y diámetro interior *d* de *B* a C. Ambas barras tienen longitud $L = 0.6$ m. Los pares se aplican al eje por medio de engranes en A, *B* y C. Esos pares son $T_1 = 240$ N·m, $T_2 = 540$ N·m, y $T_3 = 300$ N·m, respectivamente, y actúan en los sentidos que se ilustran. El eje es de acero con módulo de rigidez a cortante G=80 GPa.

a) ¿Cuál es el diámetro *d* requerido si la tensión tangencial admisible es de 80 MPa?

b) ¿Cuál es el diámetro *d* requerido si el ángulo de torsión entre dos engranes cualesquiera está limitado a *4°?*



En primer lugar dibujamos el diagrama de momentos torsores en la barra. Por otro lado, lo que varía de una sección característica a otra es el momento de inercia polar

Sección AB $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$

Sección BC $I_0 = \frac{\pi}{32} d^4 (1'25^4 - 1) = 1'44 \frac{\pi}{32} d^4$

a) La tensión tangencial máxima en la barra se producirá en un punto de la superficie exterior y valdrá $\tau_{máx} = \frac{M_T \cdot d/2}{I_0}$. Particularizando para cada sección:

Sección AB

$$\tau_{máx} = \frac{M_T\, d/2}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16 M_T}{\pi d^3} \le \tau_{adm} \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_T}{\pi \tau_{adm}}} = 0'0248 \text{ m}$$

Sección BC

$$\tau_{máx} = \frac{16 M_T 1'25}{1'44 \pi d^3} < \tau_{adm} \Rightarrow d \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_T 1'25}{1'44 \pi \tau_{adm}}} = 0'0254 \text{ m}$$

El diámetro requerido será $d = 2'54$ cm (2'6 cm)

b) El giro de un extremo respecto al engranaje es $\varphi = \frac{M_T \cdot L}{G \cdot I_0}$

Sección AB

$$\varphi_{AoB} = \frac{240 \cdot 0'6}{80 \cdot 10^9 \frac{\pi d^4}{32}} < \frac{4\pi}{180} = \frac{\pi}{45} \Rightarrow d \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 240 \cdot 0'6 \cdot 45}{80 \cdot 10^9 \pi^2}} = 0'0226 \text{ m}$$

Sección BC

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 300 \cdot 0'6 \cdot 45}{80 \cdot 10^9 \pi^2 \cdot 1'44}} = 0'0218 \text{ m}$$

El diámetro requerido será $d = 2'26$ cm.

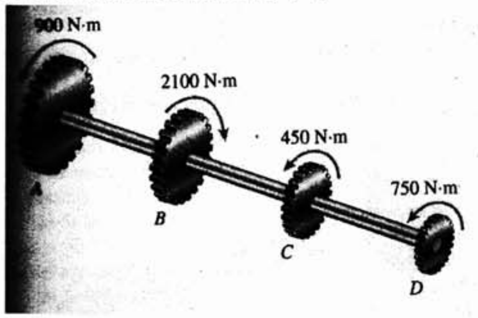
Febrero 2004 (examen parcial).

Cuatro engranajes están fijos en un eje circular y transmiten los pares que indica la figura de valor T_A= 900 N·m, T_B= 2100 N·m, T_C= 450 N·m y T_D= 750 N·m. La distancia entre cada uno de los engranajes es de 1 m. La tensión tangencial admisible en el eje es de 70 MPa. El eje es de acero con módulo de rigidez a cortante G=80 GPa.

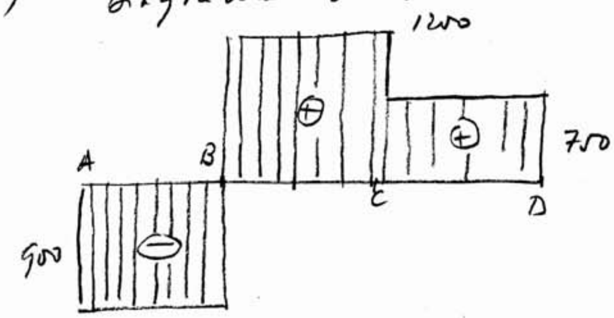
a) Dibujar el diagrama de momentos torsores del eje.

b) ¿Cuál es el diámetro *d* necesario si la sección transversal es maciza?

c) ¿Cuál es el diámetro *d* requerido si el ángulo de torsión entre dos engranes cualesquiera está limitado a *4°*?



a) Diagrama de momentos torsores



b) La tensión máxima en el eje se producirá en un punto de la superficie y valdrá:

$$\tau_{máx} = \frac{M_T \cdot d/2}{I_0} = \frac{M_T \; d/2}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16 \; M_T}{\pi d^3} \leq \tau_{adm}$$

El momento torsor es máximo en la sección BC.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \; M_T}{\pi \; \tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1200}{\pi \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0'044 \; m \rightarrow d = 4'4 \; cm.$$

c) El ángulo de torsión máximo será el del giro entre los engranajes B y C, puesto que ahí el momento es máximo.

$$\varphi = \frac{M_T \cdot L}{G \cdot I_0} = \frac{1200 \cdot 1}{80 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} < \frac{4\pi}{180} = \frac{\pi}{45}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1200 \cdot 45}{80 \cdot 10^9 \cdot \pi^2}} = 0'038 \; m \rightarrow d = 3'8 cm$$

Febrero 2005

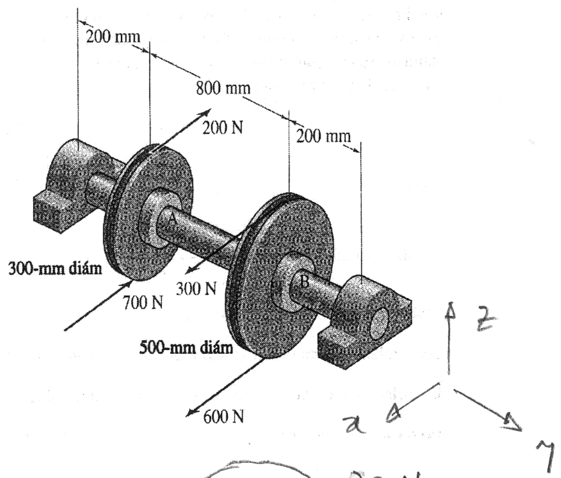
El eje de la figura está accionado por una correa en la polea A y transmite ese movimiento a la polea en B. El diámetro de la polea de transmisión A es $300\ mm$ y el de la polea arrastrada es $500\ mm$. La distancia entre las poleas es de $800\ mm$, y la distancia desde cada polea hasta el cojinete más cercano es $200\ mm$. Las correas son horizontales y cargan el eje en direcciones opuestas. La tensión tangencial admisible en el eje es de $70\ MPa$. El eje es de acero con módulo de rigidez a cortante $G=80\ GPa$.

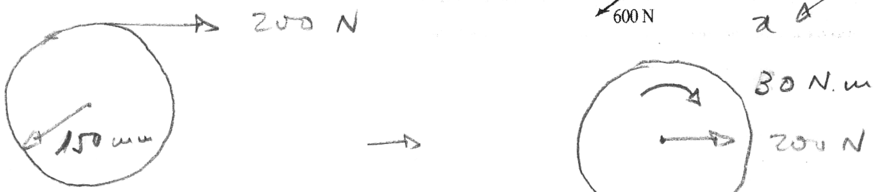
a) Dibujar un esquema del eje indicando las fuerzas y los pares que actúan sobre él. Dibujar el diagrama de momentos torsores del eje.

b) ¿Cuál es el diámetro d necesario si la sección transversal es maciza?

c) ¿Cuál es el diámetro d requerido si el ángulo de torsión entre las dos poleas está limitado a $4°$?

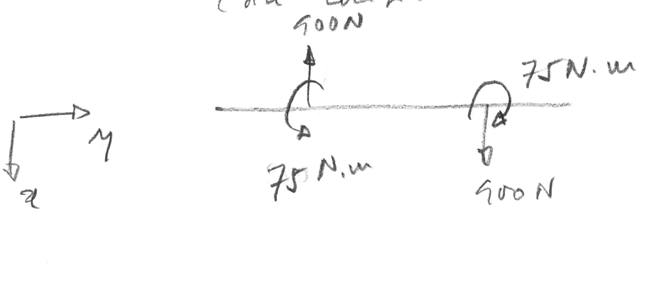
Nota: Para el cálculo, considerar sólo los esfuerzos de torsión en el eje.

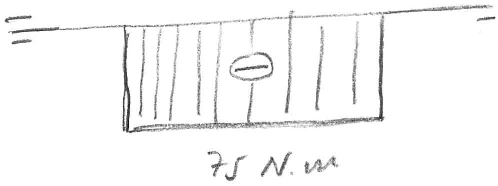




Una fuerza como la de 200 N que actúa en lo
alto de la polea A, puede trasladarse al centro de
la polea. Los efectos equivalentes son la propia fuerza
y el par que ejerce con respecto al centro de
la polea. Ambos sistemas de fuerzas son equivalentes.
Trasladando de esta manera todas las fuerzas,
los pares y fuerzas que actúan sobre el eje son
(sin considerar las reacciones en los apoyos):

El diagrama de torsores es:





b) Si la sección es macitz, $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$

$\tau_{máx} \leq \tau_{adm}$ $\tau_{adm} = 70$ MPa

$$\tau_{máx} = \frac{M_T \; d/2}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16 M_T}{\pi d^3} \qquad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_T}{\pi \tau_{adm}}} = 0'0176 \text{ m}$$

El diámetro sería de 17'6 mm, y en la práctica de 18 mm.

b) El giro está dado por la expresión $\varphi = \frac{M_T . L}{G I_0}$

$$\varphi_{A-B} = \frac{75 . 0'8}{80 . 10^9 . \frac{\pi d^4}{32}} < \frac{4\pi}{180} = \frac{\pi}{45}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 . 75 . 0'8 . 45}{80 . 10^9 . \pi^2}} = 0'0181 \text{ m} = 18'1 \text{ mm}$$