

# REPRESENTACIÓN DEL ESTADO TENSIONAL DE UN SÓLIDO. CÍRCULOS DE MOHR

Los círculos de Mohr son un método para representar gráficamente el estado tensional que padece un punto de un sólido en un instante determinado. Aunque actualmente, gracias a los ordenadores, es posible calcular las tensiones con gran precisión sin recurrir a estos métodos, siguen siendo de gran validez puesto que de un solo golpe de vista hacen comprensible la situación tensional del sólido.

Para entender esta representación repasaremos brevemente algunos conceptos ya estudiados como los de esfuerzo (tensión) y deformación, y su modo de ser expresados.

## 1. ESFUERZO

El esfuerzo o tensión se define como una fuerza por unidad de área, con unidades en psi o MPa. En una pieza sujeta a algunas fuerzas, los esfuerzos se distribuyen como una función continuamente variable dentro del continuo del material. Cada elemento infinitesimal en el material puede experimentar esfuerzos distintos al mismo tiempo, por lo que debemos considerar los esfuerzos como actuando sobre elementos infinitesimalmente pequeños dentro de la pieza. Estos elementos suelen modelarse cada uno como un cubo, según se muestra en la Figura 4-1. Las componentes de los esfuerzos actúan en las caras de estos cubos de dos maneras distintas. Los **esfuerzos normales** actúan de manera perpendicular (es decir, normal) a la cara del cubo y tienen tendencia ya sea a tirar de él (esfuerzo a tracción), o a empujarlo (esfuerzo a compresión). Los **esfuerzos cortantes** actúan paralelos a las caras de los cubos, en pares sobre caras opuestas, lo que tiende a distorsionar el cubo a forma romboidal. Esto es análogo a tomar las dos rebanadas de pan de un sándwich de Nocilla y deslizarlas en dirección opuesta. Como resultado, la capa de Nocilla se cortará. Estas componentes normales y cortantes del esfuerzo que actúan sobre un elemento infinitesimal conforman los términos de un **tensor**.

El esfuerzo es un *tensor* de segundo orden y por lo tanto requiere nueve valores componentes para describirlo en tres dimensiones. El tensor de esfuerzos en tres dimensiones se puede expresar como la matriz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.1a)$$

donde la notación para cada componente de esfuerzos contiene tres elementos, una magnitud (ya sea  $\sigma$  o  $\tau$ ), la dirección de una normal a la superficie de referencia (primer subíndice) y en una dirección de acción (segundo subíndice). Nos serviremos  $\sigma$  de referimos a los esfuerzos normales y  $\tau$  para los esfuerzos cortantes.

Muchos elementos de maquinaria están sujetos a estados de esfuerzo tridimensionales y por lo tanto requieren un tensor de esfuerzo como el de la ecuación 4.1a. Hay, sin embargo, casos especiales, que se pueden tratar como estados de esfuerzo en dos dimensiones. El tensor de esfuerzo para dos dimensiones es

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.1b)$$

La Figura 4-1 muestra un cubo infinitesimal de material tomado del interior de una pieza sujeta a algunos esfuerzos tridimensionales. Las caras de este cubo infinitesimal son paralelas a un sistema de ejes  $xyz$  tomado con alguna orientación conveniente. La orientación de cada una de las caras se

define por su vector superficial normal<sup>1</sup> según se muestra en la Figura 4-1a. La normal de superficie a la cara  $x$  es paralela al eje de las  $x$ , etcétera. Obsérvese que, por lo tanto, hay dos caras  $x$ , dos caras  $y$  y dos caras  $z$ , una positiva y la otra negativa, según se defina el sentido de su vector superficial normal.

En las Figuras 4-1b y c se muestran los nueve componentes de esfuerzo, actuando sobre las superficies de este elemento infinitesimal. Las componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$  son los esfuerzos normales, que se llaman así porque actúan en dirección normal a las superficies  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del cubo, respectivamente. Las componentes  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$ , por ejemplo, son los esfuerzos cortantes que actúan sobre la cara  $x$  y cuyas direcciones de acción son paralelas a los ejes  $y$  y  $z$ , respectivamente. El signo de cualquiera de estas componentes se define como positivo si los signos de su normal a la superficie y la dirección de fuerza son iguales; y negativo, si son distintos. Por lo que las componentes que se muestran en la Figura 4-1b son todas ellas positivas, porque accionan sobre las caras positivas del cubo y sus direcciones también son positivas. Las componentes que se muestran en la Figura 4-1c son todas ellas negativas, porque actúan sobre las caras positivas del cubo y sus direcciones son negativas. Esta regla de signos convencional hace que los esfuerzos normales de tracción sean positivos, y los esfuerzos normales de compresión, negativos.

En el caso de dos dimensiones, sólo una cara del cubo de esfuerzos necesita dibujarse. Si se retienen las direcciones  $x$  y  $y$ , y se elimina la  $z$ , miraremos perpendicularmente al plano  $xy$  del cubo de la Figura 4-1, y veremos los esfuerzos que aparecen en la Figura 4-2, que actúan sobre las caras no vistas del cubo. En función de la regla convencional de signos arriba enunciada, el lector deberá confirmar que las componentes de esfuerzo que aparecen en la Figura 4-2 sean todas positivas.

La notación de doble subíndice arriba citada es consistente cuando se aplica a esfuerzos normales. Por ejemplo, el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  actúa sobre la cara  $x$  y también aparece en la dirección  $x$ . Dado que en esfuerzos normales los subíndices se repiten, es común eliminar uno de ellos y hacer referencia a las componentes normales o perpendiculares como  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ . En las componentes de esfuerzo cortante se necesitan para su definición ambos subíndices y se conservan. También se puede demostrar que el tensor de esfuerzo es simétrico, lo que significa que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Con ello se reduce el número de componentes de esfuerzo a calcular.

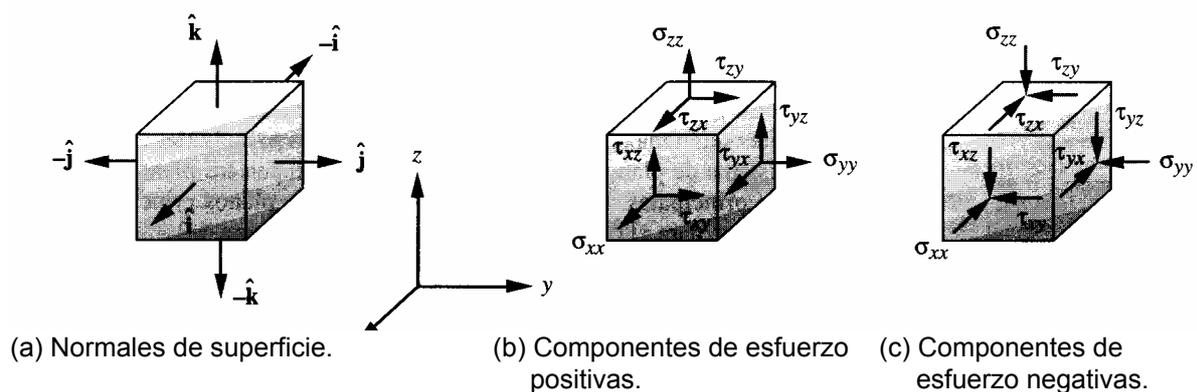


FIGURA 4-1

## 2. DEFORMACIÓN

<sup>1</sup> Un vector normal de superficie se define como que "crece hacia fuera de la superficie del sólido, en dirección perpendicular o normal a dicha superficie". Su signo se define como el sentido de este vector normal de superficie, en el sistema local de coordenadas.

En la región elástica de la mayor parte de los materiales de ingeniería el esfuerzo y la deformación están relacionados de manera lineal mediante la ley de Hooke. La deformación es también un tensor de segundo orden y se puede expresar para el caso tridimensional de la forma

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.3a)$$

y en el caso de dos dimensiones

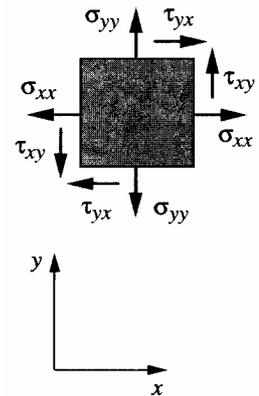
$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.3b)$$

donde  $\epsilon$  representa tanto una deformación normal como una deformación producida por el esfuerzo cortante, quedando ambas diferenciadas por sus subíndices. Aquí también por comodidad simplificaremos los subíndices repetidos, para deformaciones perpendiculares o normales a  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\epsilon_z$ , y al tiempo consideraremos dobles subíndices para identificar deformaciones por cortante.

### 3. ESFUERZOS PRINCIPALES

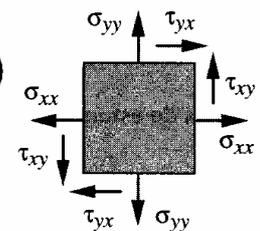
Los sistemas de ejes tomados en la Figura 4-1 y la Figura 4-2 son arbitrarios y, por lo general, se eligen por comodidad al calcular los esfuerzos aplicados. Para cualquier combinación particular de esfuerzos aplicados, alrededor de cualquier punto que se analice habrá una distribución continua del campo de esfuerzos. Los esfuerzos normales y cortantes en el punto variarán con la dirección en cualquier sistema de coordenadas que se escoja. Siempre habrá planos sobre los cuales las componentes de esfuerzo cortante sean igual a cero. Los esfuerzos normales que actúan sobre esos planos se conocen como **esfuerzos principales**. Los planos sobre los cuales estas fuerzas principales actúan se conocen como **planos principales**. La dirección de las normales de superficie a los planos principales se conocen como **ejes principales** y los esfuerzos normales que actúan en estas direcciones se conocen como **esfuerzos normales principales**. Habrá también otro conjunto de ejes mutuamente perpendiculares sobre los cuales los esfuerzos cortantes serán máximos. Los **esfuerzos cortantes principales** actúan sobre un conjunto o sistema de planos que están a  $45^\circ$  en relación con los planos de los esfuerzos normales principales. En la Figura 4-3 aparecen los planos principales y los esfuerzos principales, para el caso en dos dimensiones de la Figura 4-2.

Desde un punto de vista de ingeniería lo que más nos preocupa en el diseño de nuestras piezas de maquinaria es que no fallen y el fallo ocurrirá si el esfuerzo en cualquier punto excede a cierto valor seguro. Es necesario que determinemos los esfuerzos de mayor dimensión (tanto normales como de cortante) que ocurren en cualquier parte dentro del material que forma nuestra pieza de maquinaria. Quizá nos preocupe menos de la dirección de estos esfuerzos que su magnitud, siempre y cuando el material se pueda considerar por lo menos macroscópicamente isótropo, es decir, con propiedades de resistencia uniformes en todas direcciones. La mayor parte de los metales y muchos otros materiales de ingeniería cumplen con estos criterios, aunque como notables excepciones se deben mencionar la madera y los materiales compuestos.

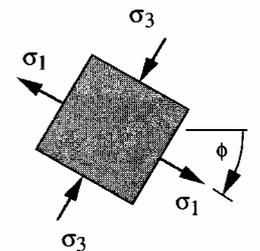


**FIGURA 4-2**

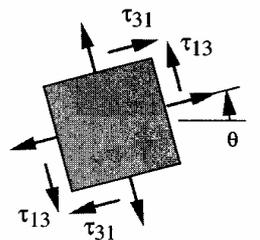
Elemento de esfuerzo en dos dimensiones



(a) Esfuerzos aplicados



(b) Esfuerzos normales principales



(c) Esfuerzos cortantes principales

**FIGURA 4-3**

Esfuerzos principales de un elemento de esfuerzo en dos dimensiones

La expresión que relaciona los esfuerzos aplicados con los esfuerzos principales es

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4a)$$

donde  $\sigma$  es la magnitud del esfuerzo principal y  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ , son los cosenos directores del vector unitario  $\mathbf{n}$ , que es normal al plano principal:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 1 \\ \hat{\mathbf{n}} &= n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Para que haya una solución a la ecuación 4.4a, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser igual a cero. Al expandir este determinante e igualarlo a cero, obtenemos

$$\sigma^3 - C_2 \sigma^2 - C_1 \sigma - C_0 = 0$$

donde

$$\begin{aligned} C_2 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ C_1 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \\ C_0 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (4.4c)$$

La ecuación 4.4c es un polinomio cúbico en  $\sigma$ . A los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$ , y  $C_2$  se les conoce como *invariantes tensoriales*, porque tienen los mismos valores, independientemente de la elección inicial de los ejes  $xyz$  sobre los cuales se midieron o calcularon los esfuerzos aplicados. Estos tres esfuerzos principales (normales)  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las tres raíces de este polinomio cúbico. Las raíces de este polinomio son siempre reales y, por lo general, quedan ordenadas de manera que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . De ser necesario, se puede determinar la dirección de los vectores principales de esfuerzo, sustituyendo cada raíz de la ecuación 4.4c en 4.4a y resolviendo en función de  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ , para cada uno de los tres esfuerzos principales. Las respectivas direcciones de los tres esfuerzos principales son mutuamente ortogonales.

Los esfuerzos cortantes principales se pueden determinar a partir de los valores de los esfuerzos normales principales, utilizando

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \\ \tau_{21} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} \\ \tau_{32} &= \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si los esfuerzos normales principales han sido ordenados como se muestra arriba, entonces  $\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{13}$ . Las respectivas direcciones de los planos de los esfuerzos cortantes principales están a  $45^\circ$  de los esfuerzos normales principales, y también son mutuamente ortogonales.

La solución de la ecuación 4.4c en función de sus tres raíces se puede hacer de manera trigonométrica o mediante un algoritmo iterativo de determinación de raíces.

Para el caso especial de un estado de esfuerzos en dos dimensiones, las ecuaciones 4.4c para el esfuerzo principal se reducen a<sup>2</sup>

<sup>2</sup> También se aplican las ecuaciones 4.6 cuando un esfuerzo principal es distinto de cero, pero está dirigido a lo largo de uno de los ejes del sistema de coordenadas  $xyz$  seleccionado para el cálculo. El cubo de esfuerzos de la Figura 4-2 se gira entonces respecto a un eje principal para determinar los ángulos de los otros dos planos principales.

$$\sigma_a, \sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_c = 0$$

Las dos raíces distintas de cero calculadas a partir de la ecuación 4.6a se identifican temporalmente como  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$ , y en el caso de dos dimensiones, la tercera raíz  $\sigma_c$ , será siempre igual a cero. Dependiendo de valores resultantes, las tres raíces entonces se identifican de acuerdo con la regla convencional: la *algebraicamente mayor* =  $\sigma_1$ , la *algebraicamente menor* =  $\sigma_3$  Y la *otra* =  $\sigma_2$ . Aplicando la ecuación 4.6a para resolver el ejemplo que aparece en la Figura 4-4 nos daría valores de  $\sigma_1 = \sigma_a$ ,  $\sigma_3 = \sigma_b$  Y  $\sigma_2 = \sigma_c = 0$ , según aparece indicado en la figura<sup>3</sup>. Por supuesto, la ecuación 4.4c correspondiente al caso tridimensional se puede utilizar de todas maneras para resolver cualquier caso en dos dimensiones. Uno de los tres esfuerzos principales determinados aparecerá entonces como igual a cero.

Una vez determinados los tres esfuerzos principales y ordenados según se describe arriba, se determina el esfuerzo cortante máximo a partir de la ecuación 4.5:

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad (4.6)$$

#### 4. ESFUERZO PLANO Y DEFORMACIÓN PLANA

El estado general del esfuerzo y la deformación es tridimensional, pero hay configuraciones geométricas particulares que pueden ser tratadas de manera distinta.

##### Esfuerzo plano

El estado de esfuerzos en dos dimensiones, es decir biaxial, también se conoce como esfuerzo plano. El **esfuerzo plano** requiere que un esfuerzo principal sea igual a cero. Esta situación es común en algunas aplicaciones. Por ejemplo, una placa o un cascarón delgado puede también tener un estado de esfuerzos plano lejos de sus bordes o de sus puntos de sujeción. Estos casos se pueden tratar con el procedimiento más sencillo de las ecuaciones 4.6.

##### Deformación plana

Hay deformaciones principales asociadas con los esfuerzos principales. Si una de las deformaciones principales (digamos  $\epsilon_3$ ) es igual a cero, y las deformaciones restantes son independientes de la dimensión a lo largo de su eje principal,  $n_3$ , éste se conocerá como **deformación plana**. Esta situación ocurre en geometrías particulares. Por ejemplo, si una barra larga, sólida, prismática está cargada únicamente en la dirección transversal, aquellas regiones dentro de ella que estén lejos de cualquier restricción en sus extremos tendrán en esencia una deformación igual a cero en la dirección a lo largo del eje de la barra, y se tratará de una deformación plana. (Sin embargo, el esfuerzo no es igual a cero en la dirección de deformación igual a cero.) Un dique hidráulico largo puede considerarse con una situación de deformación plana, en regiones muy lejos de sus extremos o de su base, donde está sujeto a estructuras vecinas.

#### 5. CÍRCULOS DE MOHR

<sup>3</sup> Si en el caso de dos dimensiones la regla convencional de numeración en tres dimensiones se sigue con rigidez, entonces algunas veces los dos esfuerzos principales distintos de cero se convertirán en  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  si son de signo opuesto (como en el caso del ejemplo 4-1). Otras veces serán  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  cuando ambos sean positivos y el menor ( $\sigma_3$ ) es igual a cero (como en el caso del ejemplo 4-2). Una tercera posibilidad es que ambos esfuerzos principales distintos de cero sean negativos (a compresión) y el algebraicamente mayor del conjunto ( $\sigma_1$ ) sea entonces igual a cero. La ecuación 4.6 identifica de manera arbitraria los dos esfuerzos bidimensionales principales distintos de cero  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$ , con el que queda ( $\sigma_c$ ) reservado para el miembro igual a cero del trío.

Desde hace mucho tiempo los círculos de Mohr<sup>4</sup> han sido una forma de solución gráfica de la ecuación 4.6 y de determinar los esfuerzos principales para el caso de esfuerzos planos. Muchos libros de texto sobre diseño de máquinas presentan el método del círculo de Mohr como una técnica primordial de solución para la determinación de esfuerzos principales. Antes de la llegada de las calculadoras y de las computadoras programables, el método gráfico de Mohr era una forma razonable y práctica de resolución de la ecuación 4.6. Hoy día, sin embargo, es mucho más práctico determinar numéricamente los esfuerzos principales. Sin embargo, presentamos el método gráfico por varias razones. Puede servir como verificación rápida a una solución numérica, o quizás sea el único método viable si falla la energía de su computadora o si se agotan las pilas de su calculadora. También cumple con el útil objetivo de ser una presentación visual del estado de los esfuerzos en un punto.

También hay círculos de Mohr en el caso de esfuerzos tridimensionales, pero no está disponible ningún método de graficación para crearlos directamente a partir de datos de esfuerzos aplicados, excepto en el caso especial de que uno de los esfuerzos principales sea coincidente con un eje del sistema de coordenadas  $xyz$  seleccionado, es decir, cuando uno de los planos es el del esfuerzo principal. Sin embargo, una vez calculados los esfuerzos principales a partir de la ecuación 4.4c mediante alguna técnica adecuada de determinación de raíces, se pueden dibujar círculos de Mohr tridimensionales según los esfuerzos principales calculados.

El plano de Mohr --en el cual se trazan los círculos de Mohr-- se organiza con sus ejes mutuamente perpendiculares, aunque en el espacio real el ángulo entre ellos representa  $180^\circ$ . **Todos los ángulos dibujados en el plano de Mohr tienen el doble de su valor en el espacio real.** La abscisa es el eje para todos los esfuerzos normales. Los esfuerzos normales aplicados  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , se trazan a lo largo de este eje y los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  también se determinan sobre este eje. La ordenada es el eje para todos los esfuerzos cortantes. Se utiliza para trazar los esfuerzos cortantes aplicados  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  y determinar el esfuerzo cortante máximo<sup>5</sup>. Mohr utilizó una regla convencional de signos para esfuerzos cortantes, que hace que los pares esfuerzo cortante en sentido del movimiento de las agujas del reloj sean positivos, lo **que no es consistente con la regla de la mano derecha, ahora estándar**. Aun así, esta regla convencional de la mano izquierda se sigue empleando para el círculo de Mohr. La mejor manera de demostrar el uso del círculo de Mohr es mediante ejemplos.

---

<sup>4</sup> Ideados por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918). Sus círculos también se utilizan para la transformación coordenada de deformaciones, de los momentos de área y de los productos de inercia.

<sup>5</sup> El hecho de que Mohr utilizara un mismo eje para trazar más de una variable es una de las fuentes de confusión para los estudiantes cuando se enfrentan por primera vez a este método. Sólo se debe recordar que todos los esfuerzos normales se trazan sobre el eje horizontal, trátense o no de esfuerzos normales ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ) o de esfuerzos principales ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ ) aplicados y todas las tensiones tangenciales se trazan sobre el eje vertical, independientemente que se trate de esfuerzos cortantes ( $\tau_{xy}$ , etcétera) o de esfuerzos cortantes máximos aplicados ( $\tau_{12}$ , etcétera). Los ejes de Mohr no son ejes cartesianos convencionales.

## EJEMPLO 1

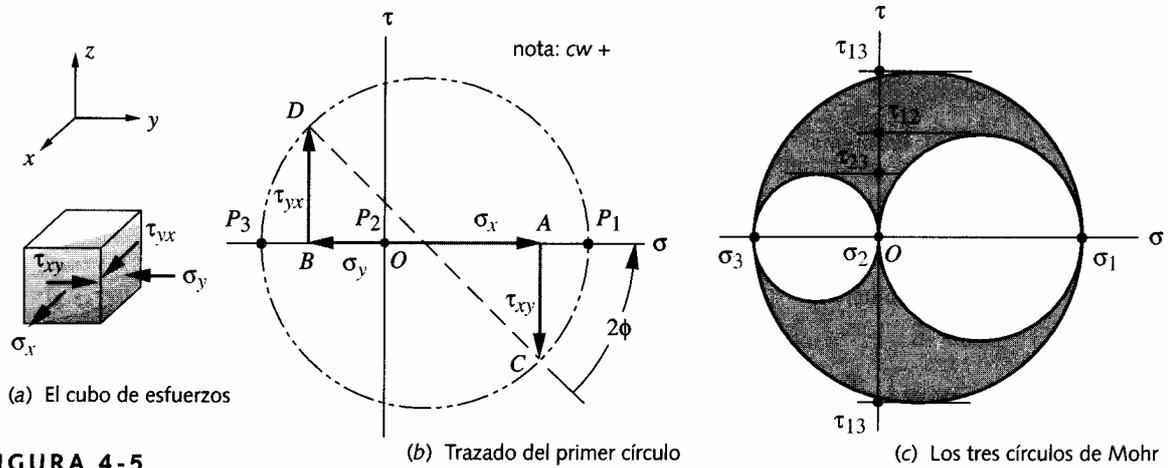
### Determinación de los esfuerzos principales mediante los círculos de Mohr

**Problema** Un elemento de esfuerzo biaxial como se muestra en la Figura 4-2 tiene  $\sigma_x = 40.000$  psi,  $\sigma_y = 20.000$  psi y  $\tau_{xy} = 30.000$  psi en sentido contrario al de las manecillas del reloj (ccw). Se pide trazar los círculos de Mohr para determinar los esfuerzos principales.

**Solución** Véanse la Figura 4-2 y la Figura 4-5.

- 1 Se trazan los ejes del plano de Mohr según se muestra en la Figura 4-5b, y márkuelos como  $\sigma$  y  $\tau$ .
- 2 Se sitúan los esfuerzos dados  $\sigma_x$ , (como línea OA) en cualquier escala práctica a lo largo del eje de esfuerzos normales (horizontales). En este ejemplo  $\sigma_x$ , es un esfuerzo de tensión (positivo).
- 3 Se lleva el esfuerzo  $\sigma_y$  (como línea) a lo largo del eje normal de esfuerzos. En este caso  $\sigma_y$  es un esfuerzo de compresión (negativo).
- 4 La Figura 4-2 muestra que el par de esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  crea un par en sentido contrario al de las agujas del reloj sobre el elemento. Este par se equilibra con el par en sentido de las agujas del reloj proporcionado por los esfuerzos cortantes  $\tau_y$ . Estos dos esfuerzos cortantes ( $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$ ) son de igual magnitud, de acuerdo con la ecuación 4.2, y positivos, de acuerdo con la regla de signos convencionales de esfuerzos. Pero, en vez de utilizar la regla convencional de signos de esfuerzos, se trazan en el círculo de Mohr de acuerdo con la rotación que implican para el elemento, según la regla convencional de signos de la mano izquierda: positivo en sentido de las agujas del reloj y negativo en sentido contrario al de las agujas del reloj.
- 5 Dibujamos una línea vertical hacia abajo --en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj - del extremo de  $\tau_x$ , (como línea AC) para representar la magnitud a escala de  $\tau_{xy}$ . Trazamos una línea vertical hacia arriba -en sentido del movimiento de las agujas del reloj- del extremo de  $\sigma_y$  (como línea BD) para representar la magnitud a escala de  $\tau_{yx}$ .
- 6 El diámetro de un círculo de Mohr es la distancia del punto C al punto D. La línea AB corta a CD. El círculo se dibuja tomando esta intersección como centro.
- 7 Dos de los esfuerzos normales principales se determinan a continuación como las dos intersecciones que este círculo de Mohr hace con el eje de esfuerzos normales, en los puntos P<sub>1</sub>, y P<sub>3</sub>:  $\sigma_1 = 52.426$  psi, y  $\sigma_3 = -32.426$  psi.
- 8 Dado que en este ejemplo no hay esfuerzos aplicados en la dirección z, se trata de un estado de esfuerzos de dos dimensiones, y el tercer esfuerzo principal  $\sigma_2$ , es igual a cero, y se localiza en el punto O, que también se identifica como P<sub>2</sub>.
- 9 Todavía deben dibujarse otros dos círculos de Mohr. Los tres círculos de Mohr quedan definidos por los diámetros  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  y de  $(\sigma_2 - \sigma_3)$ , que son las líneas P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>, P<sub>1</sub>P<sub>3</sub> Y P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>. Los tres círculos aparecen en la Figura 4-5c.
- 10 Trazamos líneas tangentes horizontales desde los extremos superior e inferior de cada círculo de Mohr hasta su intersección con el eje del cortante (vertical). Ello determina los valores de los esfuerzos cortantes principales, asociados con cada par de esfuerzos normales principales:  $\tau_{13} = 42.426$ ,  $\tau_{12} = 26.213$  y  $\tau_{23} = 16.213$  psi. A pesar de tener únicamente dos esfuerzos normales principales distintos de cero, hay también tres esfuerzos cortantes principales distintos de cero. Sin embargo, sólo el mayor de ellos,  $\tau_{m\acute{a}x} = \tau_3 = 42.426$  psi es de interés para efectos de diseño.
- 11 También podemos determinar los ángulos (con respecto a nuestros ejes xyz originales) de los esfuerzos normales principales y los cortantes principales, partiendo del círculo de Mohr. Estos ángulos, si el material es homogéneo o isótropo, sólo tienen un interés académico. En caso de no ser isótropo, las propiedades del material dependen de la dirección y entonces la dirección de los esfuerzos principales es de importancia. El ángulo  $2\Phi = -45^\circ$  de la Figura 4-5a representa la

orientación del esfuerzo normal principal con respecto al eje de las  $x$  en nuestro sistema original. La línea  $DC$  del plano de Mohr está en el eje de las  $x$  en el espacio real, y los ángulos se miden de acuerdo con la regla convencional de la mano izquierda de Mohr ---en sentido del movimiento de las agujas del reloj---. Dado que en el espacio real los ángulos del plano de Mohr son el doble, el ángulo del esfuerzo principal  $\sigma_1$  con respecto al eje  $x$  en el espacio real es  $\Phi = -22.5^\circ$ . El esfuerzo  $\sigma_3$  será de  $90^\circ$  a partir de  $\sigma_1$  y en el espacio real el esfuerzo cortante máximo  $\tau_{13}$  estará a  $45^\circ$  del eje de  $\sigma_1$ .



**FIGURA 4-5**

El cubo de esfuerzos y los círculos de Mohr para el ejemplo 4-1

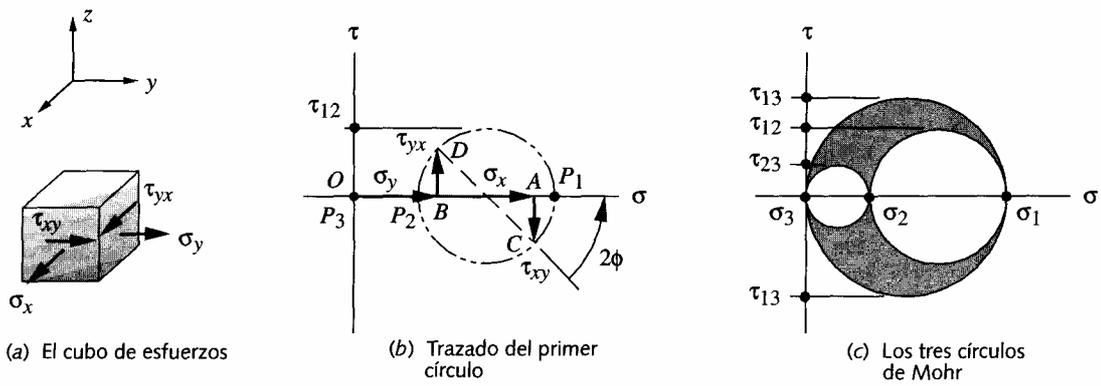
## EJEMPLO 2

### Determinación de esfuerzos planos mediante los círculos de Mohr

**Problema** Un elemento de esfuerzo biaxial como se muestra en la Figura 4-2 tiene  $\sigma_x = 40.000$  psi,  $\sigma_y = 20.000$  psi y  $\tau_{xy} = 10.000$  psi en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (ccw). Determinense, mediante círculos de Mohr, los esfuerzos principales.

**Solución** Véanse las Figuras 4-2 y 4-6.

- 1 Trazamos los ejes del plano de Mohr según se muestra en la Figura 4-6, e identifiquelos como  $\sigma$  y  $\tau$ .
- 2 Se señala el esfuerzo dado  $\sigma_x$ , (como línea  $OA$ ) a escala a lo largo del eje de esfuerzos normales (horizontal). Nuevamente, en este ejemplo  $\sigma_x$ , es un esfuerzo de tensión (positivo).
- 3 Se sitúa el esfuerzo  $\sigma_y$  (como línea  $OB$ ) a escala a lo largo del eje de esfuerzos normal.  $\sigma_y$  es también un esfuerzo de tensión (positivo) y, por lo tanto, aparece en la misma dirección que  $\sigma_x$ , a lo largo del eje de  $\sigma$ .
- 4 La Figura 4-2 muestra que el par de esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  crean un par contra las agujas del reloj sobre el elemento. Este par está equilibrado por el par con las agujas del reloj proporcionado por los esfuerzos cortantes  $\tau_{yx}$ . Recuerde que ambos esfuerzos cortantes ( $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$ ), son iguales, de acuerdo con la ecuación 4.2 y positivos, de acuerdo con la regla convencional de signos de esfuerzos.
- 5 Trazamos una línea vertical hacia abajo de la punta de  $\sigma_x$ , (como línea  $AC$ ) para representar la magnitud a escala de  $\tau_{xy}$ . Mediante una línea vertical hacia arriba de la punta de  $\sigma_y$  (como línea  $BD$ ) se representa la magnitud a escala de  $\tau_{yx}$ .
- 6 El diámetro de un círculo de Mohr es la distancia del punto  $C$  al punto  $D$ . La línea  $AB$  atraviesa a la línea  $CD$ . El círculo se dibuja tomando esta intersección como centro.
- 7 Dos de los tres esfuerzos normales principales se encuentran a continuación en las dos intersecciones que este círculo de Mohr hace con el eje de esfuerzos normales en los puntos  $P_1$ , y  $P_3$ :  $\sigma_1 = 44.142$  y  $\sigma_2 = 15.858$  psi. Si nos detenemos en este momento, el esfuerzo cortante máximo parece ser  $\tau_{12} = 14.142$  psi, según queda definido por la proyección de una tangente horizontal desde la parte superior del círculo con el eje de las  $\tau$ , según se muestra en la Figura 4-6b.
- 8 Dado que en este ejemplo no hay ningún esfuerzo aplicado en la dirección  $z$ , se trata de un estado de esfuerzos en dos dimensiones, y el tercer esfuerzo principal,  $\sigma_3$ , se sabe que es igual a cero, por lo tanto está localizado en el punto  $O$ , también marcado como punto  $P_3$ ,
- 9 Todavía quedan dos círculos de Mohr por dibujar. Los tres círculos de Mohr quedan definidos por los diámetros  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  y de  $(\sigma_2 - \sigma_3)$ , los cuales, en este caso, son las líneas  $P_1P_3$ ,  $P_1P_2$  y  $P_2P_3$ , según se observa en la Figura 4-6.
- 10 Llevamos líneas tangentes horizontales de la parte de los extremos superior e inferior de cada círculo de Mohr hasta cruzar el eje del cortante (vertical). Esto determina el valor de los esfuerzos cortantes principales, asociados con cada par de esfuerzos normales principales: es decir,  $\tau_{13} = 22.071$ ,  $\tau_{12} = 14.142$  y  $\tau_{23} = 7.929$  psi. El mayor de todos éstos es  $\tau_{m\acute{a}x} = 22.071$ , y no el valor 14.142 que se determinó en el paso 7.
- 11 Siempre es el círculo que está entre los esfuerzos principales mayor y menor el que determina el esfuerzo cortante máximo. En el ejemplo anterior, el esfuerzo principal igual a cero no era el menor de los tres, porque uno de los esfuerzos principales era negativo. En este ejemplo, el esfuerzo principal igual a cero es el menor. Por lo tanto, si se dejan de dibujar los tres círculos, se hubiera llegado a un error serio en el valor de  $\tau_{m\acute{a}x}$ .



**FIGURA 4-6**

El cubo de esfuerzos y los círculos de Mohr para el ejemplo 4-2