ESCUELA UNIVERSITARIA DE DISEÑO INDUSTRIAL

TEORÍA DE MÁQUINAS

(16 de junio de 2004)

Cuestiones:

1. Expresiones de la velocidad y la aceleración en el movimiento relativo. Significado de cada término. Particularización al movimiento plano. Indicar con un ejemplo gráfico la dirección y el sentido de cada término. (1,5 puntos)

2. Elección de puntos de precisión para la generación de función mediante un cuadrilátero articulado. (1 punto)

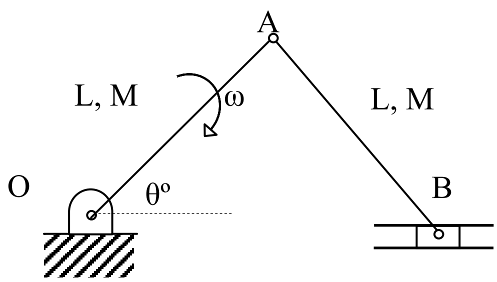
3. Levas. Definición. Tipos de levas. Principales componentes. (1 punto)

4. Se desea construir un engrane cilíndrico-recto con la siguiente relación de transmisión $\mu = \frac{15}{81}$ con un ángulo de presión ψ=20º. Analizar la posibilidad de que se produzca penetración y proponer las correcciones adecuadas para evitarla. (1 punto)

Problemas:

1. El mecanismo de la figura está constituido por dos barras iguales de masa M y longitud L, formando un ángulo θ con la horizontal. Obtener: (3,5 puntos)

   i. Nº de grados de libertad del mecanismo.
   ii. Momento M a aplicar en O para que la barra OA gire con velocidad angular ω constante.
   iii. Reacciones en las articulaciones del mecanismo. (en las condiciones anteriores)

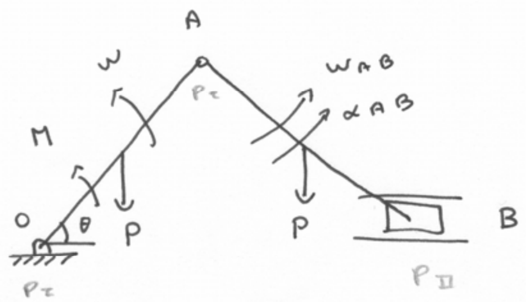


2. Construir un engrane mediante dos ruedas cilíndrico-rectas con las siguientes especificaciones: (2 puntos)

   Distancia entre ejes E=354 mm.
   n1=810 r.p.m.
   n2=370 r.p.m.
   Ángulo de presión ψ=20º.
   β=8.
   Potencia a transmitir P=18 C.V.
   E acero=$2,1 \cdot 10^4$ Kg/mm².
   $\sigma_{admisible}$= 300 Kg/cm².
   Duración mínima = 10^5 horas.
   γ_c=9,62.

TIEMPO ESTIMADO 3:15 HORAS

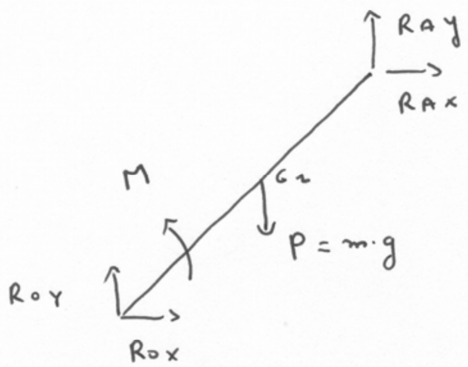
1)



i) $n = 3$ $\quad p_I = 2$ $\quad p_{II} = 1$

$$GDL = 3(3-1) - 2\cdot 2 - 1 = 1$$

ii)



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{g1}$$

$$R_{ox} + R_{Ax} = m a_{g1x}$$

$$R_{oy} + R_{Ay} - mg = m a_{g1y}$$

$$\sum \vec{M}_o = I \cdot \vec{\alpha} = 0 \qquad (w = cte)$$

$$\vec{M} + \vec{M}_p + \vec{M}_{RA} = 0$$

$$\vec{M}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{L}{2}\cos\theta & \frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} =$$

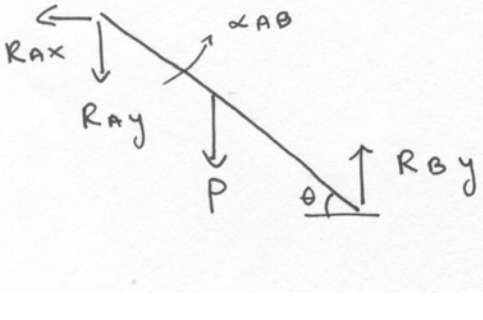
$$\vec{M}_P = -\frac{L}{2}\cos\theta\, mg\, \vec{k}$$

$$\vec{M}_{RA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L\cos\theta & L\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ R_{AX} & R_{AY} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_{RA} = \left(R_{AY} L \cos\theta - R_{AX} L\,\text{sen}\,\theta\right)\vec{k}$$

$$M - \frac{L}{2}\, mg \cos\theta + R_{Ay} L \cos\theta - R_{Ax} L\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$M = L\left(\frac{mg\cos\theta}{2} - R_{Ay}\cos\theta + R_{Ax}\,\text{sen}\,\theta\right)$$



$$\sum \vec{F} = m\, \vec{a_{g2}}$$

$$-R_{Ax} = m\, a_{g2x}$$

$$-R_{Ay} + R_{By} - mg = m\, a_{g2y}$$

$$\sum \vec{M_G} = I\, \vec{\alpha_{AB}} = \vec{M_{RA}} + \vec{M_{RB}}$$

$$\vec{M_{RA}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{L}{2}\cos\theta & \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -R_{Ax} & -R_{Ay} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{L}{2}\left(R_{Ay}\cos\theta + R_{Ax}\operatorname{sen}\theta \right) \vec{k}$$

$$\vec{M_{RB}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{L}{2}\cos\theta & -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & R_{By} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M_{RB}} = \frac{L}{2} R_{By}\cos\theta\, \vec{k}$$

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_{x=-L/2}^{x=L/2} x^2 \lambda\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{x=-L/2}^{x=L/2} = \frac{2\, L^3/2^3}{3}$$

$$I = \frac{L^3 \lambda}{12} = \frac{1}{12} m L^2$$

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

CINEMÁTICA -

$$\vec{a}_{g1} = \cancel{\vec{a}_O} + \cancel{\vec{a}_r} + \cancel{\vec{\alpha} \wedge \vec{OG_1}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{OG_1} + \cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r} =$$

$$\vec{a}_{g1} = -\omega^2 \vec{OG_1} = -\omega^2 \frac{L}{2} \left(\cos\theta \, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} \right)$$

$$\vec{a}_{g2} = \vec{a}_A + \cancel{\vec{a}_r} + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \vec{AG_2} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AG_2} + \cancel{2\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{v}_r}$$

$$\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_O} + \cancel{\vec{a}_r} + \cancel{\vec{\alpha} \wedge \vec{OA}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{OA} + \cancel{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r} =$$

$$\vec{a}_A = -\omega^2 \vec{OA} = -\omega^2 L \left(\cos\theta \, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} \right)$$

CÁLCULO DE ω_{AB} y α_{AB} -

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \cancel{\vec{v}_r} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_O} + \cancel{\vec{v}_r} + \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ L\cos\theta & L\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{v}_A = +\omega L \operatorname{sen}\theta \, \vec{i} - \omega L \cos\theta \, \vec{j} =$$

$$\vec{v}_A = \omega L \left(\operatorname{sen}\theta \, \vec{i} - \cos\theta \, \vec{j} \right)$$

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ L\cos\theta & -L\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega_{AB} L \operatorname{sen}\theta \, \vec{i} + \omega_{AB} L \cos\theta \, \vec{j} =$$

$$= \omega_{AB} L \left(\operatorname{sen}\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \right)$$

$$\vec{v}_B = \omega L \left(\operatorname{sen}\theta\, \vec{i} - \cos\theta\, \vec{j} \right) + \omega_{AB} L \left(\operatorname{sen}\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j} \right) =$$

$$\vec{v}_B = L \operatorname{sen}\theta \left(\omega + \omega_{AB} \right) \vec{i} + L \left(\omega_{AB} - \omega \right) \cos\theta\, \vec{j} = v_B\, \vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{AB} - \omega = 0 \Rightarrow \omega_{AB} = \omega$$

$$\vec{v}_B = 2 L \operatorname{sen}\theta\, \omega\, \vec{i}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \cancel{\vec{\alpha} \wedge} + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} + \cancel{2 \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{v}_r}$$

$$\vec{\alpha}_{AB} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{AB} \\ L\cos\theta & -L\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{AB} L \left(\operatorname{sen}\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j} \right)$$

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} = -\omega_{AB}^2\, \vec{AB} = -\omega^2 \left(L\cos\theta\, \vec{i} - L\operatorname{sen}\theta\, \vec{j} \right)$$

$$\vec{a}_B = -\omega^2 L \left(\cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j} \right) - \omega^2 \left(L\cos\theta\, \vec{i} - L\operatorname{sen}\theta\, \vec{j} \right) +$$

$$+ \alpha_{AB} L \left(\operatorname{sen}\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j} \right) = a_B\, \vec{i} \Rightarrow$$

$$-\omega^2 L \operatorname{sen}\theta + \omega^2 L \operatorname{sen}\theta + \alpha_{AB} L \cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_{AB} = 0$$

$$\vec{a}_B = -2\omega^2 L \cos\theta\, \vec{i}$$

$$\vec{a}_{g_2} = \vec{a}_A + \cancel{\vec{a}_r} + \cancel{\vec{\alpha}_{AB}} \wedge \vec{AG_2} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AG_2} + \cancel{2\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{v}_r}$$

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AG_2} = -\omega_{AB}^2 \, \vec{AG_2} =$$

$$= -\omega^2 \left(\frac{L}{2} \cos\theta \, \vec{i} - \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} \right) =$$

$$\vec{a}_{g_2} = -\omega^2 L \left(\cos\theta \, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} \right) - \frac{\omega^2 L}{2} \left(\cos\theta \, \vec{i} - \operatorname{sen}\theta \, \vec{j} \right) =$$

$$\vec{a}_{g_2} = -\frac{3\omega^2 L}{2} \cos\theta \, \vec{i} - \frac{\omega^2 L}{2} \operatorname{sen}\theta \, \vec{j}$$

$$R_{Ox} + R_{Ax} = -m \frac{\omega^2 L}{2} \cos\theta$$

$$R_{Oy} + R_{Ay} - mg = -m \frac{\omega^2 L}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$M = L \left(\frac{mg\cos\theta}{2} - R_{Ay} \cos\theta + R_{Ax} \operatorname{sen}\theta \right)$$

$$R_{Ax} = +m \frac{3\omega^2 L}{2} \cos\theta$$

$$-R_{Ay} + R_{By} - mg = -m \frac{\omega^2 L}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$\cancel{\frac{L}{2}} \left(R_{Ay} \cos\theta + R_{Ax} \operatorname{sen}\theta \right) + \cancel{\frac{L}{2}} R_{By} \cos\theta = 0$$

$$R_{Ay} \cancel{\cos\theta} + \frac{3}{2} m\omega^2 L \cancel{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta + R_{By} \cancel{\cos\theta} = 0$$

$$R_{Ay} = -R_{By} - \frac{3}{2} m\omega^2 L \operatorname{sen}\theta$$

$$R_{By} + \frac{3}{2} m\omega^2 L \operatorname{sen}\theta + R_{By} - mg = -\frac{m\omega^2 L}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$2R_{By} = mg - 2m\omega^2 L \operatorname{sen}\theta$$

$$R_{By} = \frac{mg}{2} - m\omega^2 L \operatorname{sen}\theta$$

$$R_{Ay} = -\frac{mg}{2} + m\omega^2 L \operatorname{sen}\theta - \frac{3}{2} m\omega^2 L \operatorname{sen}\theta =$$

$$R_{Ay} = -\frac{mg}{2} - \frac{m\omega^2 L}{2} \operatorname{sen}\theta$$

$$M = L\left(\frac{mg\cos\theta}{2} - \left(-\frac{mg}{2} - \frac{m\omega^2 L}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{3m}{2}\omega^2 L \cos\theta \operatorname{sen}\theta\right) =$$

$$M = L\left(mg\cos\theta + 2m\omega^2 L\cos\theta \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$R_{ox} = -\frac{3}{2} m\omega^2 L\cos\theta - \frac{m\omega^2 L}{2}\cos\theta =$$

$$R_{ox} = -2m\omega^2 L\cos\theta$$

$$R_{oy} = mg + \left(+\frac{mg}{2} + \cancel{\frac{m\omega^2 L}{2}\operatorname{sen}\theta}\right) - \cancel{\frac{m\omega^2 L}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

$$R_{oy} = \frac{3}{2} mg$$

2) $\mu = \frac{n_2}{n_1} = \frac{370}{810} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1}{R_2}$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{37}{81} \Rightarrow R_1 = \frac{37}{81} R_2$$

$$E = R_1 + R_2 = \frac{37}{81} R_2 + R_2 = \left(\frac{81+37}{81}\right) R_2$$

$$E = \frac{118}{81} R_2 = 354 \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{81 \cdot 354}{118} = 243 \text{ mm}$$

$$R_1 = \frac{37}{81} R_2 = \frac{37 \cdot 243}{81} = 111 \text{ mm}$$

$$m = \frac{2R}{z} \Rightarrow E = R_1 + R_2 = \frac{m}{2} (z_1 + z_2)$$

$$\mu = \frac{z_1}{z_2} = \frac{37}{81} \Rightarrow z_1 = \frac{37}{81} z_2$$

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{37}{81} z_2 + z_2\right) = \frac{m}{2} \left(\frac{37+81}{81}\right) z_2$$

$$z_2 = \frac{2E}{m\left(\frac{118}{81}\right)} = \frac{162 E}{118 m} = \frac{486}{m}$$

$$z_1 = \frac{222}{m}$$

$m = 6 \Rightarrow \quad z_2 = \dfrac{486}{6} = 81$

$$z_1 = \frac{222}{6} = 37$$

(no hay penetración $z > z_{min} = 17$)

Comprobación dinámica -

$$m \geq 35{,}7 \sqrt[3]{\frac{1000\, P(CV)\, \gamma_c}{z \cdot n(rpm)\, \sigma(Kg/cm^2) \cdot \beta}} \Rightarrow$$

$$m \geq 35{,}7 \cdot \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 18 \cdot 9{,}62}{37 \cdot 810 \cdot 300 \cdot 8}} =$$

$m \geq 4{,}78 \Rightarrow m = 6$ valdría $\Rightarrow$

$R_1 = 111$ mm

$R_2 = 243$ mm

$h_c = m = 6$ mm

$h_p = m + \dfrac{1}{6} m = \dfrac{7}{6} m = 7$ mm

$h = h_c + h_p = 6 + 7 = 13$ mm

$t = m \cdot \pi = 6 \cdot \pi = 18,85 \text{ mm}$

$e = s = \dfrac{t}{2} = 9,42 \text{ mm}$

$b = \beta \cdot m = 8 \cdot 6 = 48 \text{ mm}$

$$r_m = \frac{2 R_1 \operatorname{sen} \psi}{\mu + 1} = \frac{2 \cdot 111 \cdot \operatorname{sen} 20}{\frac{37}{81} + 1} =$$

$r_m = 52,12 \text{ mm}$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{0,35 \, N \, E_a}{b \cdot r_m}}$$

$$T = \frac{716200 \cdot P \,(CV)}{n\,(rpm)\; R\,(mm)} =$$

$$T = \frac{716200 \cdot 18}{111 \cdot 810} = 143,38 \text{ Kg}$$

$$N = \frac{T}{\cos \psi} = \frac{143,38}{\cos 20} = 152,58 \text{ Kg}$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{0,35 \cdot 152,58 \cdot 2,1 \, 10^4}{48 \cdot 52,12}} = 21,17 \text{ Kg/mm}^2$$

$$a = \frac{n(rpm)\ h(horas) \cdot 60}{10^6} \quad \text{millones rod.}$$

$$a = \frac{810 \cdot 100.000\ 60}{10^6} = 4860$$

$$\Delta 1 = \frac{1}{0,487}\ a^{1/6}\ \sigma F = 178,92\ HB$$

$$\Delta 2 = \sqrt[6]{\mu}\ \Delta 1 = 157,02\ HB$$