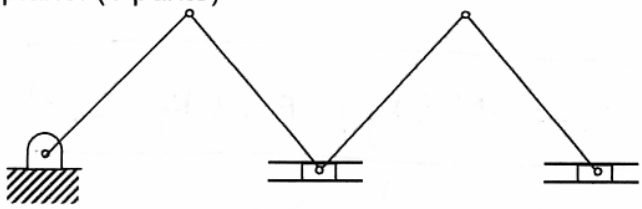
ESCUELA UNIVERSITARIA DE DISEÑO INDUSTRIAL

TEORÍA DE MÁQUINAS
(27 de mayo de 2004)

Cuestiones:

1. Criterio de Grübler. Determinar el número de grados de libertad del siguiente mecanismo plano: (1 punto)



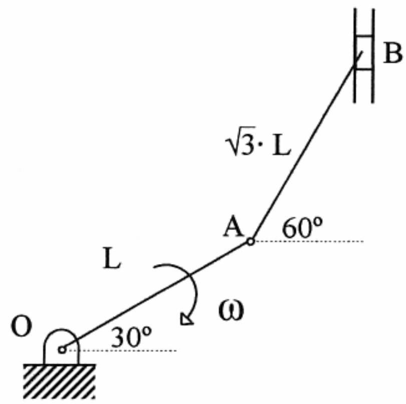
2. Ecuación de Freudenstein. Aplicación a la generación de función mediante un cuadrilátero articulado. (1 punto)

3. Penetración en engranajes. Número mínimo de dientes. Correcciones. (1 punto)

Problemas:

1. La barra OA del mecanismo articulado plano de la figura gira con velocidad angular ω constante en el sentido de las agujas del reloj. Obtener: (3 puntos)

   i. Nº de grados de libertad del mecanismo.
   ii. Velocidad y aceleración lineal del punto B.
   iii. Velocidad angular ω_{AB} y aceleración angular α_{AB} de la barra AB.



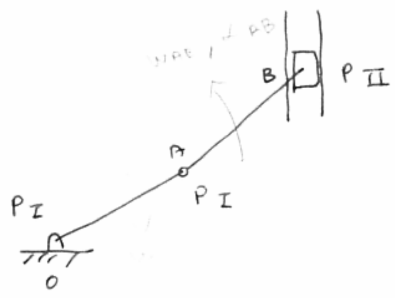
2. Dimensionar un mecanismo biela manivela que cumpla las siguientes especificaciones: carrera c=18 cm, relación de tiempos Q=1,25, longitud de la manivela l_2=7 cm. (1,5 puntos)

3. Construir un engrane mediante dos ruedas cilíndrico-rectas con las siguientes especificaciones: (2,5 puntos)

Relación de transmisión μ=3.
Distancia entre ejes E=400 mm.
n1=100 r.p.m.
Ángulo de presión ψ=20º.
β=6.

Potencia a transmitir P=15 C.V.
E acero=$2,1\cdot10^4$ Kg/mm².
$\sigma_{admisible}$= 300 Kg/cm².
Duración mínima = 10^5 horas.
γ_c=9,62.

1)



i) $n = 3 \qquad p_I = 2 \qquad p_{II} = 1$

$$GDL = 3(3-1) - 2\cdot 2 - 1 = 1 \text{ GDL}$$

ii) $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \cancel{\vec{v}_r} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB}$

$$\vec{AB} = \sqrt{3}\cdot L\left(\cos 60\,\vec{i} + \operatorname{sen} 60\,\vec{j}\right) =$$

$$\vec{AB} = \sqrt{3}\cdot L\left(\frac{1}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ \frac{\sqrt{3}L}{2} & \frac{3L}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} = -\frac{3L}{2}\,\omega_{AB}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}L}{2}\,\omega_{AB}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_O} + \cancel{\vec{v}_r} + \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{OA} = L\left(\cos 30\,\vec{i} + \operatorname{sen} 30\,\vec{j}\right) = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \frac{L\sqrt{3}}{2} & \frac{L}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \frac{L\omega}{2}\,\vec{i} - \frac{L\omega\sqrt{3}}{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{v_B} = \left(\frac{L\omega}{2} - \frac{3L}{2}\,\omega_{AB}\right)\vec{i} + \left(\frac{-L\omega\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}L}{2}\,\omega_{AB}\right)\vec{j}$$

$$\vec{v_B} = v_B\,\vec{j} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{L}\omega}{\cancel{2}} - \frac{3\cancel{L}}{\cancel{2}}\,\omega_{AB} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{AB} = \frac{\omega}{3} \quad \circlearrowright$$

$$\vec{v_B} = \left(-\frac{L\omega\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}L}{2}\,\frac{\omega}{3}\right)\vec{j} = -\frac{\sqrt{3}L\omega}{3}\,\vec{j}$$

$$\vec{v_B} = -\frac{L\omega}{\sqrt{3}}\,\vec{j}$$

$$\vec{a_B} = \vec{a_A} + \cancelto{0}{\vec{a_r}} + \vec{\alpha_{AB}} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega_{AB}} \wedge \vec{\omega_{AB}} \wedge \vec{AB} + \cancelto{0}{2\vec{\omega_{AB}} \wedge \vec{v_r}}$$

$$\vec{\alpha_{AB}} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{AB} \\ \frac{\sqrt{3}L}{2} & \frac{3L}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\alpha}_{AB} \wedge \vec{AB} = -\frac{3L}{2}\alpha_{AB}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}L}{2}\alpha_{AB}\,\vec{j}$$

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB} = -\omega_{AB}^2\,\vec{AB} =$$

$$= -\left(\frac{\omega}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}L\,\vec{j}\right) =$$

$$= -\frac{\omega^2\sqrt{3}L}{18}\vec{i} - \frac{\omega^2 L}{6}\vec{j}$$

$$\vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_O} + \cancel{\vec{a}_r} + \cancel{\vec{\alpha} \wedge \vec{OA}} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{OA} + \cancel{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{OA} = -\omega^2\,\vec{OA} =$$

$$\vec{a}_A = -\omega^2\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{L}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_B = \left(-\frac{3L}{2}\alpha_{AB} - \frac{\omega^2\sqrt{3}L}{18} - \frac{\omega^2 L\sqrt{3}}{2}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\alpha_{AB} - \frac{\omega^2 L}{6} - \frac{\omega^2 L}{2}\right)\vec{j} = a_B\,\vec{j}$$

$$-\frac{3\cancel{L}}{\cancel{2}}\alpha_{AB} - \frac{\omega^2\cancel{L}\sqrt{3}}{\cancel{18}\,9} - \frac{\omega^2\cancel{L}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 0$$

$$\alpha_{AB} = -\frac{\omega^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{9} + \sqrt{3}\right) = -\frac{10\sqrt{3}\,\omega^2}{3\cdot 9}$$

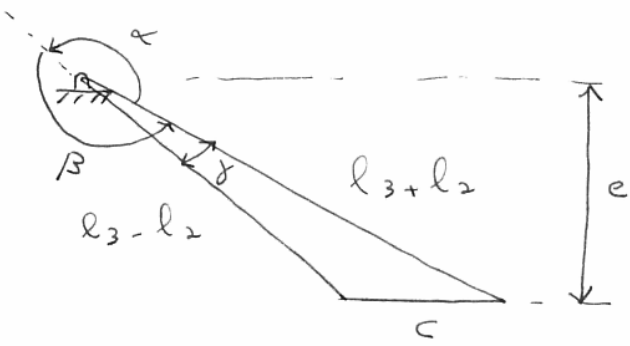
$$\alpha_{AB} = -\frac{10\,w^2}{9\sqrt{3}} \curvearrowright$$

$$\vec{a}_B = \left(\frac{\sqrt{3}\,L}{2} \left(-\frac{10\,w^2}{9\sqrt{3}} \right) - \frac{w^2 L}{6} - \frac{w^2 L}{2} \right) \vec{j}$$

$$\vec{a}_B = -\frac{w^2 L}{2} \left(\frac{10}{9} + \frac{1}{3} + 1 \right) \vec{j} =$$

$$\vec{a}_B = -\frac{w^2 L}{2} \cdot \frac{22}{9} \vec{j} = -\frac{w^2 L\,11}{9} \vec{j}$$

2)



$$Q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{360-\alpha}{\alpha} = 1,25$$

$$360 - \alpha = 1,25\,\alpha$$

$$\alpha = \frac{360}{2,25} = 160°$$

$$\beta = 360 - \alpha = 360 - 160 = 200°$$

$$\gamma = 180 - \alpha = 180 - 160 = 20°$$

TH COSENO -

$$c^2 = (l_3+l_2)^2 + (l_3-l_2)^2 - 2(l_3+l_2)(l_3-l_2)\cos\gamma$$

$$c^2 = l_3^2 + l_2^2 + 2l_3l_2 + l_3^2 + l_2^2 - 2l_3l_2 - 2(l_3^2 - l_2^2)\cos\gamma$$

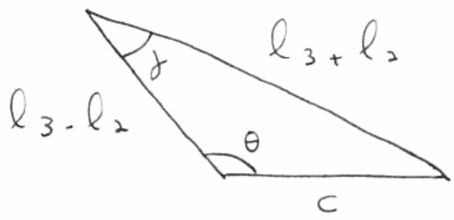
$$c^2 = 2(l_3^2 + l_2^2) - 2(l_3^2 - l_2^2)\cos\gamma$$

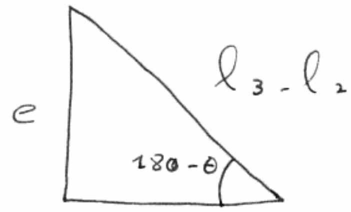
$$c^2 = 2l_3^2(1-\cos\gamma) + 2l_2^2(1+\cos\gamma)$$

$$l_3^2 = \frac{c^2}{2(1-\cos\gamma)} - l_2^2\frac{(1+\cos\gamma)}{(1-\cos\gamma)}$$

$$l_3^2 = \frac{18^2}{2(1-\cos 20)} - 7^2\frac{(1+\cos 20)}{(1-\cos 20)} =$$

$$l_3 = \sqrt{1110,2} = 33,3 \text{ cm}$$





$$\frac{l_3 + l_2}{\text{sen } \theta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \Rightarrow$$

$$\text{sen } \theta = \frac{l_3 + l_2}{c} \text{ sen } \gamma$$

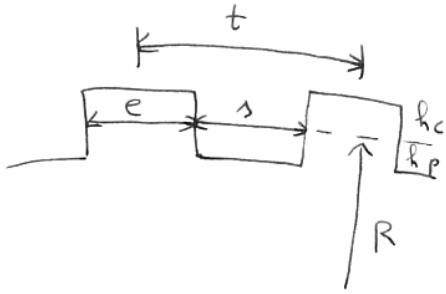
$$\text{sen}(180 - \theta) = \text{sen } \theta = \frac{e}{l_3 - l_2}$$

$$e = (l_3 - l_2) \text{ sen } \theta = (l_3 - l_2) \frac{(l_3 + l_2)}{c} \text{ sen } \gamma =$$

$$e = \frac{(l_3^2 - l_2^2)}{c} \text{ sen } \gamma =$$

$$e = \frac{((33,3)^2 - 7^2)}{18} \text{ sen } 20 = 20,14 \text{ cm}$$

3) $\mu = 3 = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow$



$n_2 = \mu n_1 = 3 \cdot 100 = 300$ rpm

$\mu = \frac{R_1}{R_2} = \frac{z_1}{z_2} = 3 \Rightarrow$

$\frac{R_1}{R_2} = 3 \Rightarrow R_1 = 3R_2$

$E = R_1 + R_2 = 400 \Rightarrow 3R_2 + R_2 = 400 \Rightarrow$

$R_2 = \frac{400}{4} = 100$ mm

$R_1 = 3R_2 = 300$ mm

$m = \frac{2R}{z} \Rightarrow \quad E = R_1 + R_2 = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)$

$z_1 = 3 z_2 \Rightarrow$

$E = \frac{m}{2} 4 z_2 = 2 m z_2 \Rightarrow$

$m = \frac{400}{2 z_2} = \frac{200}{z_2} \Rightarrow z_2 = \frac{200}{m}$

$z_1 = \frac{600}{m}$

* En mecánica de precisión, nunca más de 100 dientes $\Rightarrow$

$m = 8 \Rightarrow \quad z_2 = \frac{200}{8} = 25$

$z_1 = \frac{600}{8} = 75$

(Es el menor m que da un z entero)

- No hay penetración $z \geq z_{~~min~~} = 17$

Comprobación dinámica

$$m \geq 35,7 \sqrt[3]{\frac{1000 \; P(CV) \cdot \gamma_c}{z \cdot n \; (rpm) \; \sigma \; (Kg/cm^2) \cdot \beta}}$$

$$m \geq 35,7 \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 15 \cdot 9,62}{25 \cdot 300 \cdot 300 \cdot 6}} = 7,86 \Rightarrow$$

$m = 8$ valdrá $\Rightarrow$

$R_1 = \frac{8 \cdot 75}{2} = 300$ mm

$R_2 = \frac{8 \cdot 25}{2} = 100$ mm

$E = R_1 + R_2 = 300 + 100 = 400$ mm

$h_c = m = 8$ mm

$h_p = m + \frac{1}{6} m = \frac{7 \cdot 8}{6} = 9,33$ mm

$h = h_c + h_p = 8 + 9,33 = 17,33$ mm

$$t = m \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25,13 \text{ mm}$$

$$e = s = \frac{t}{2} = 12,56 \text{ mm}$$

$$b = \beta \cdot m = 6 \cdot 8 = 48 \text{ mm}$$

$$rm = \frac{2 R_1 \operatorname{sen} \psi}{\mu + 1} = \frac{2 \cdot 300 \cdot \operatorname{sen} 20}{3 + 1} = 51,30$$

$$\sigma F = \sqrt{\frac{0,35 N E_a}{b \cdot rm}}$$

$$T = \frac{716200 \cdot P(CV)}{n(rpm) \cdot R(mm)} \quad \text{(ESFUERZO TANGENCIAL)}$$

$$T = \frac{716200 \cdot 15}{100 \cdot 300} = 358,1 \text{ Kg}$$

$$N = \frac{T}{\cos \psi} = \frac{358,1}{\cos 20} = 381,08 \text{ Kg}$$

$$\sigma F = \sqrt{\frac{0,35 \; 381,08 \; 2,1 \; 10^4}{48 \cdot 51,3}} = 33,72 \text{ Kg/mm}^2$$

$$a = \frac{n(rpm) \cdot h(\text{horas}) \cdot 60}{10^6} \text{ millones de rodaduras}$$

$$a = \frac{100 \cdot 100000 \cdot 60}{10^6} = 600 \text{ millones de rodaduras}$$

$$\Delta 1 = \frac{1}{0,487} \; a^{1/6} \; \sigma_F =$$

$$\Delta 1 = \frac{1}{0,487} \cdot \sqrt[6]{600} \; 33,72 = 201,12 \text{ HB}$$

$$\Delta 2 = \sqrt[6]{\mu} \; \Delta 1 = \sqrt[6]{3} \cdot 201,12 \text{ HB} = 241,54 \text{ HB}$$