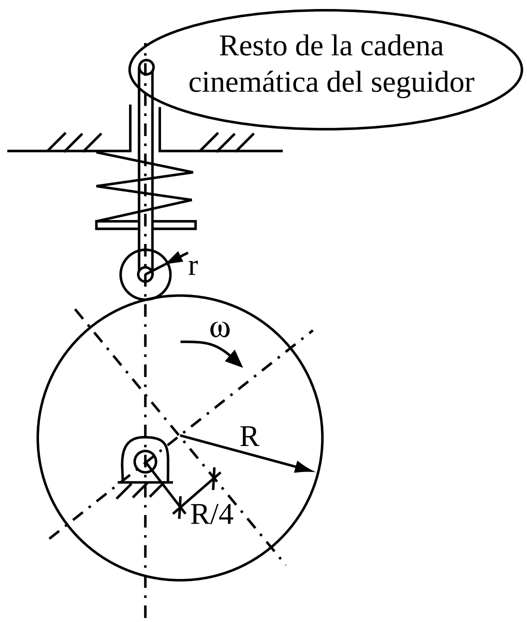
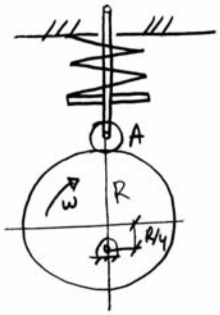
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Diciembre 99
Nombre ....

La figura muestra una leva de disco con seguidor de traslación, radial, de rodillo. La leva es un círculo de radio R=20 mm, articulado al elemento fijo a una distancia R/4 de su centro. El rodillo posee un radio r=2.5 mm. Durante el funcionamiento del sistema, la leva gira con una velocidad angular ω constante de 3000 rpm. La inercia del seguidor y toda la cadena cinemática unida a él es equivalente a considerar una masa puntual en el seguidor de 0.5 Kg.
Para evitar que leva y seguidor se separen, se ha dispuesto un resorte, que queda sin tensión en la posición más baja del seguidor. El efecto gravitatorio puede despreciarse.



Determinar:
a) Valor mínimo necesario de rigidez del resorte (en Kg/mm) para evitar que leva y seguidor se separen.
b) Fuerza de contacto (en N) entre leva y seguidor cuando éste se encuentra en su posición más baja.
c) Par motor (en Nm) que actúa sobre la leva cuando el seguidor se encuentra en su posición más baja.

a) La posición más crítica para que leva y seguidor se separen es cuando el seguidor alcanza el punto más alto.



Llamando A al centro del seguidor, se tiene que su velocidad en esa posición es,

$$\underset{|\,?}{v_A} = \underset{\xrightarrow{\quad}\ \left(\frac{5R}{4}+r\right)\omega}{v_a} + \underset{\overline{\quad}\ ?}{v_r} \quad \text{(con la leva)}$$

$$v_A = 0 \ ; \quad v_r = \left(\frac{5R}{4}+r\right)\omega \leftarrow$$

En cuanto a la aceleración,

$$\underset{|\,?}{a_A} = \underset{\left(\frac{5R}{4}+r\right)\omega^2 \downarrow}{a_a} + \underset{\frac{v_r^2}{R+r} = \frac{\left(\frac{5R}{4}+r\right)^2\omega^2}{R+r}\ \downarrow}{a_r} + \underset{2\left(\frac{5R}{4}+r\right)\omega^2 \uparrow}{a_{cor}} \quad \text{(con la leva)}$$

$$a_A = \left(\frac{5R}{4}+r\right)\omega^2 - \frac{\left(\frac{5R}{4}+r\right)^2}{R+r}\omega^2 \uparrow =$$

$$= \left[\left(\frac{5\times 20}{4}+2'5\right) - \frac{\left(\frac{5\times 20}{4}+2'5\right)^2}{22'5}\right]\left[\frac{3000\times 2\pi}{60}\right]^2 \times 10^{-3} = -603'14\ m/s^2$$

Si ahora se estudia la Dinámica del seguidor en esa posición,

$$N - F_K = m\,a_A$$

El valor mínimo de rigidez necesario será aquél para el que $N=0$ en la posición más crítica. Entonces,

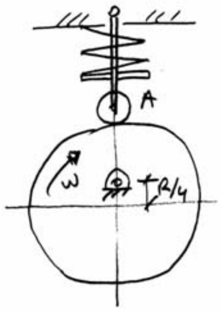
$$-F_K = m\,a_A \Rightarrow F_K = 0'5 \times 603'14 = 301'57\ N$$

El recorrido del seguidor es $2\times\frac{R}{4} = 2\times\frac{20}{4} = 10$ mm. Dado que en la posición más baja el enunciado dice que el resorte está sin tensión, ello implica que en la posición más alta sufre una deformación de 10 mm. Así,

$F_K = k\delta \Rightarrow 301'57 = k \times 0'01 \Rightarrow k = 30157 \ \frac{N}{m}$

y en kg/mm , $k = 30157 \ \frac{1/9'81}{10^3} \Rightarrow \boxed{k = 3'074 \ \text{kg/mm}}$

b) En la posición más baja del seguidor, se puede realizar un cálculo cinemático análogo al efectuado en el primer apartado.



$v_A = v_a + v_r$ (con la leva)

$|? \quad \underset{\longrightarrow}{\left(\frac{3R}{4}+r\right)\omega} \quad \overline{\ ?\ }$

$v_A = 0 \ ; \quad v_r = \left(\frac{3R}{4}+r\right)\omega \leftarrow$

$a_A = a_a + a_r + a_{cor}$ (con la leva)

$|? \quad \left(\frac{3R}{4}+r\right)\omega^2 \downarrow \quad \frac{v_r^2}{R+r} = \frac{\left(\frac{3R}{4}+r\right)^2\omega^2}{R+r} \downarrow \quad 2\left(\frac{3R}{4}+r\right)\omega^2 \uparrow$

$$a_A = \left(\frac{3R}{4}+r\right)\omega^2 - \frac{\left(\frac{3R}{4}+r\right)^2}{R+r}\omega^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{3\times 20}{4}+2'5\right) - \frac{\left(\frac{3\times 20}{4}+2'5\right)^2}{20+2'5}\right]\left(\frac{3000\times 2\pi}{60}\right)^2 \times 10^{-3} = 383'82 \ m/s^2$$

Aplicando ahora las ecuaciones de la Dinámica al seguidor,

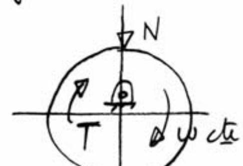
$N - F_K = m a_A$

Pero en esta posición $F_K = 0$, luego

$N = m a_A = 0'5 \times 383'82 = \boxed{191'92 \ N = N}$

c) El par motor sobre la leva cuando el seguidor se encuentra en su posición más baja es,

$\boxed{T = 0}$ ya que $\alpha = \dot{\omega} = 0$.

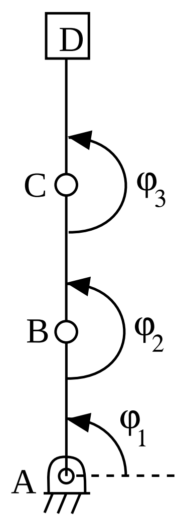


Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 00
Nombre ....

La figura muestra un robot plano de cadena abierta y tres grados de libertad. En las articulaciones A, B y C, van montados tres motores rotativos que producen el movimiento del robot, dado por el valor a lo largo del tiempo de los ángulos indicados en la figura:

$$\varphi_1(t) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}\right); \quad \varphi_2(t) = \pi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}; \quad \varphi_3(t) = \pi + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5};$$

La longitud de las tres barras es idéntica e igual a 1 m. Las barras tienen masa uniformemente distribuida. La masa de la barra AB es de 30 Kg, la masa de la barra BC es de 20 Kg, y la masa de la barra CD es de 10 Kg. Además, el robot lleva agarrado en la mano (punto D) un bloque puntual, cuya masa es de 40 Kg. El sistema se halla sometido a la acción de la gravedad.



Determinar, en el instante *t*=3.75 segundos, el valor de la fuerza de reacción en la articulación C, y el valor del par que aplica el motor rotativo en C.

Derivadas de los ángulos:

$$\varphi_1(t) = \frac{\pi}{2}\left(1+\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}\right); \quad \dot\varphi_1(t) = \frac{\pi^2}{5}\cos\frac{2\pi t}{5}; \quad \ddot\varphi_1(t) = -\frac{2\pi^3}{25}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}$$

$$\varphi_2(t) = \pi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}; \quad \dot\varphi_2(t) = -\frac{\pi^2}{5}\cos\frac{2\pi t}{5}; \quad \ddot\varphi_2(t) = \frac{2\pi^3}{25}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}$$

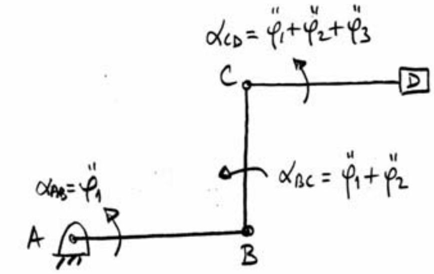
$$\varphi_3(t) = \pi + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}; \quad \dot\varphi_3(t) = \frac{\pi^2}{5}\cos\frac{2\pi t}{5}; \quad \ddot\varphi_3(t) = -\frac{2\pi^3}{25}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5}$$

Valores de posición, velocidad y aceleración de los ángulos cuando $t = 3'75$.

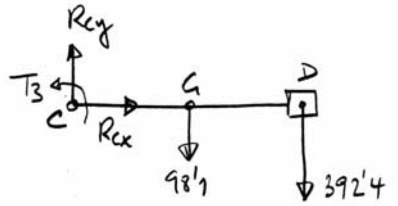
$$\varphi_1 = 0; \quad \dot\varphi_1 = 0; \quad \ddot\varphi_1 = \frac{2\pi^3}{25}$$

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}; \quad \dot\varphi_2 = 0; \quad \ddot\varphi_2 = -\frac{2\pi^3}{25}$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2}; \quad \dot\varphi_3 = 0; \quad \ddot\varphi_3 = \frac{2\pi^3}{25}$$



Aislando la última barra y el bloque puntual,



Se pueden establecer las ecuaciones de Newton-Euler para este sólido, que proporcionarán las tres incógnitas. Es preciso calcular la aceleración del cdg de la barra, punto G, y del bloque puntual, punto D, así como la aceleración angular del conjunto.

Como indica la figura, la aceleración angular de CD será,

$$\alpha_{CD} = \ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2+\ddot\varphi_3 = \frac{2\pi^3}{25} - \frac{2\pi^3}{25} + \frac{2\pi^3}{25} = \frac{2\pi^3}{25} \text{ saliente}$$

La aceleración de B,

$$a_B = \ddot\varphi_1 \times AB = \frac{2\pi^3}{25} \times 1 = \frac{2\pi^3}{25}\uparrow$$

La aceleración de C,

$$a_C = a_B + a_{C/B} = \frac{2\pi^3}{25}\uparrow + 0 = \frac{2\pi^3}{25}\uparrow \quad \left(\text{ya que } \alpha_{BC} = \ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2 = 0\right)$$

La aceleración de G,

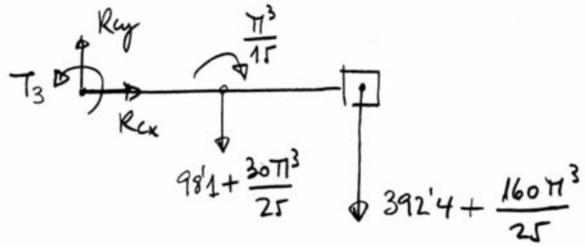
$$a_G = a_C + a_{G/C} = \frac{2\pi^3}{25} + \frac{2\pi^3}{25}\,0'5 = \frac{3\pi^3}{25}\uparrow \; ; \; M_{CD}a_G = 10\times\frac{3\pi^3}{25} = \frac{30\pi^3}{25}$$

La aceleración de D,

$$a_D = a_C + a_{D/C} = \frac{2\pi^3}{25} + \frac{2\pi^3}{25}\times 1 = \frac{4\pi^3}{25}\uparrow \; ; \; M_D a_D = 40\times\frac{4\pi^3}{25} = \frac{160\pi^3}{25}$$

Para más comodidad, vamos a introducir las fuerzas de inercia correspondientes.

$$I_{CD}\alpha_{CD} = \frac{1}{12}\,10\times 1^2\,\frac{2\pi^3}{25} = \frac{\pi^3}{15}$$



Ahora, estableciendo el equilibrio, se obtiene,

$\boxed{R_{cx}=0}$

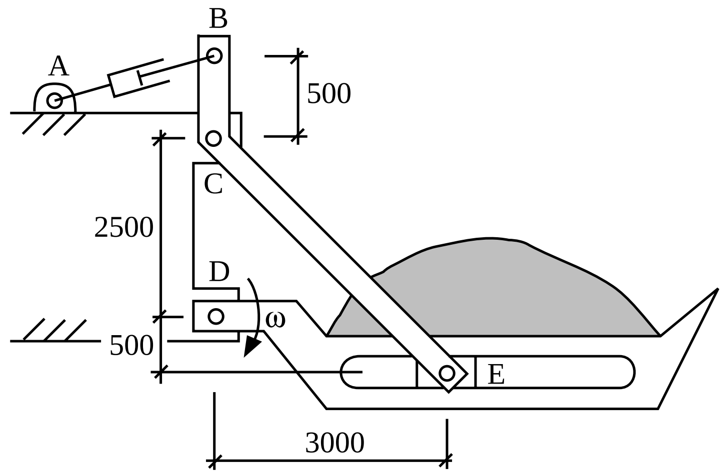
$$R_{cy} = 98'1 + \frac{30\pi^3}{25} + 392'4 + \frac{160\pi^3}{25} = \boxed{726'15\ N = R_{cy}}$$

$$T_3 = \frac{\pi^3}{15} + \left(98'1 + \frac{30\pi^3}{25}\right)\times 0'5 + \left(392'4 + \frac{160\pi^3}{25}\right)\times 1 =$$

$$= \boxed{660'56\ Nm = T_3}$$

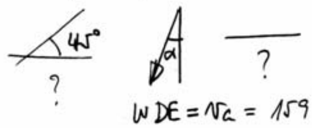
Nombre ....

En el instante representado, la pala descargadora de la figura gira en sentido descendente, con velocidad angular constante ω=3 grados/s. Todas las medidas se expresan en mm.

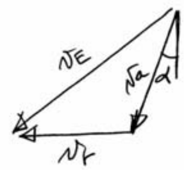


a) Determinar la velocidad y aceleración lineales del actuador hidráulico AB que mueve el sistema sabiendo que, en dicho instante, su inclinación es de 30º respecto a la horizontal.
b) Si la carga que transporta la pala es de 1 Tm y, siempre en el instante representado, su resultante se sitúa 500 mm a la derecha del punto E, calcular la fuerza ejercida por el actuador AB, así como la potencia disipada por el mismo.

a) $v_E = v_a + v_r$ (con la pala)



$\omega\, DE = v_a = 159'25 \frac{mm}{s}$



$tg\alpha = \frac{500}{3000} = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = 9'46°$

$DE = \sqrt{500^2 + 3000^2} = 3041'38$ mm

$\omega = 3 (°)/s = 3 \frac{\pi}{180}$ r/s $= \frac{\pi}{60}$ r/s $= 0'05236$ r/s

$$\begin{cases} v_E \cos 45 = v_a \cos\alpha \Rightarrow v_E = \dfrac{159'25 \cos 9'46°}{\sqrt{2}/2} = 222'15 \frac{mm}{s} \\ v_E \operatorname{sen} 45 = v_r + v_a \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow v_r = 222'15 \frac{\sqrt{2}}{2} - 159'25 \operatorname{sen} 9'46° = 130'91 \frac{mm}{s} \end{cases}$$

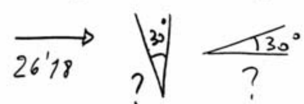
$\underline{v_E = 222'15 \text{ mm/s}} = \omega_{BCE} \cdot CE$

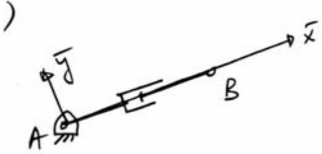
$CE = \sqrt{3000^2 + 3000^2} = 4242'64$ mm

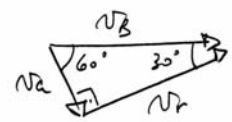
$\omega_{BCE} = \frac{v_E}{CE} = \frac{222'15}{4242'64} = \underline{0'05236 \text{ r/s} = \omega_{BCE}}$ ↻ entr.

$v_B = \omega_{BCE}\, CB = 0'05236 \times 500 = \underline{26'18 \text{ mm/s} = v_B}$ →

$v_B = v_a + v_r$ (con ejs $\bar{x}\bar{y}$)







$\boxed{v_r = v_B \cos 30° = 26'18 \frac{\sqrt{3}}{2} = 22'67 \text{ mm/s}}$

$v_a = v_B \operatorname{sen} 30 = 26'18 \frac{1}{2} = 13'09$ mm/s $=$

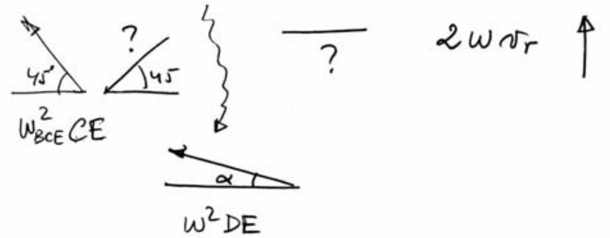
$AB = \frac{500}{\operatorname{sen} 30} = 1000$ mm

$= \omega_{ejs}\, AB$

$\underline{\omega_{ejs}} = \frac{v_a}{AB} = \frac{13'09}{1000} = \underline{0'01309 \text{ r/s}}$ ↻ entr.

$\boxed{\text{Velocidad lineal del actuador } AB = v_r = 22'67 \text{ mm/s alarg.}}$

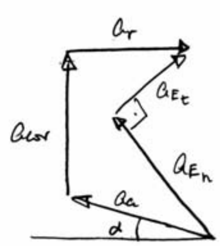
$a_E = a_a + a_r + a_{cor}$ (con la pala)



$$\omega^2_{BCE}\, CE = 0'05236^2 \times 4242'64 = 11'63 \ \frac{mm}{s^2}$$

$$\omega^2 DE = \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 3041'38 = 8'34 \ \frac{mm}{s^2}$$

$$2\omega v_r = 2\,\frac{\pi}{60}\, 130'91 = 13'71 \ \frac{mm}{s^2}$$



$$a_a \operatorname{sen}\alpha + a_{cor} = a_{E_n} \operatorname{sen}45 + a_{E_t}\cos 45$$

$$8'34 \operatorname{sen} 9'46 + 13'71 = 11'63\,\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{E_t}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_{E_t} = 9'70 \ mm/s^2$$

$$a_a \cos\alpha = a_r - a_{E_t}\operatorname{sen}45 + a_{E_n}\cos 45$$

$$8'34 \cos 9'46 = a_r - 9'70\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 11'63\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_r = 6'86 \ mm/s^2$$

$\underline{a_{E_t} = 9'70 \ mm/s^2} = \alpha_{BCE}\, CE$

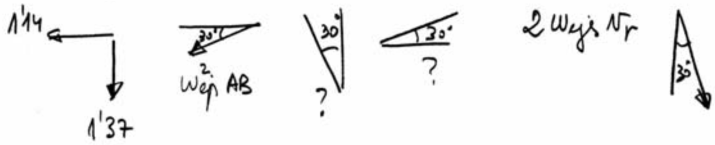
$\alpha_{BCE} = \dfrac{a_{E_t}}{CE} = \dfrac{9'70}{4242'64} = \underline{0'002286 \ r/s^2 \circlearrowleft \text{sal.} = \alpha_{BCE}}$

$$a_B = \downarrow \omega^2_{BCE}\, CB + \overleftarrow{\alpha_{BCE}\, CB}$$

$\omega^2_{BCE}\, CB = 0'05236^2 \times 500 = 1'37 \ \frac{mm}{s^2}$

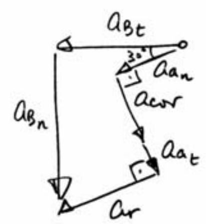
$\alpha_{BCE}\, CB = 0'002286 \times 500 = 1'14 \ \frac{mm}{s^2}$

$$a_B = a_a + a_r + a_{cor} \quad (\text{en ejes } \bar{x}\bar{y})$$



$$\omega^2_{ejs} AB = 0'01309^2 \times 1000 = 0'17 \ \frac{mm}{s^2}$$

$$2\omega_{ejs} v_r = 2 \times 0'01309 \times 22'67 = 0'59 \ \frac{mm}{s^2}$$



$$a_{B_n} \cos 60 + a_{B_t} \cos 30 = a_{a_n} + a_r$$

$$1'37 \frac{1}{2} + 1'14 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0'17 + a_r$$

$$\boxed{a_r = 1'5 \ \frac{mm}{s^2}}$$

$$\boxed{\text{Aceleración lineal del actuador } AB = a_r = 1'5 \ \frac{mm}{s^2} \ \text{acort.}}$$

b) Si la resultante de la carga está 500 mm a la derecha del punto E, se puede establecer la siguiente igualdad de potencia (se desprecian las fuerzas de inercia dada la lentitud de la maniobra),

$$\text{Carga} \times (\omega \times 3500) = F_{act} \cdot v_{act}$$

$$1 \times \left(\frac{\pi}{60} \times 3500\right) = F_{act} \times 22'67$$

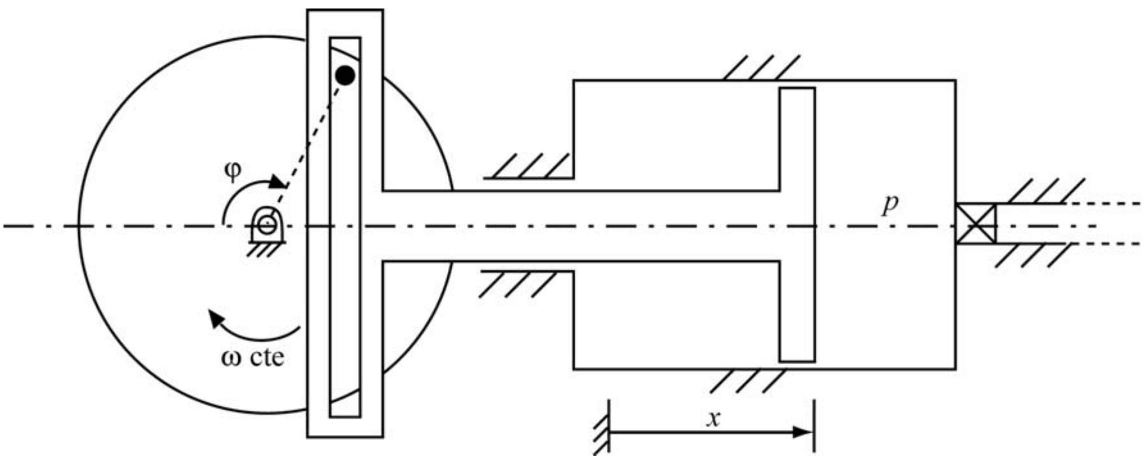
$$\boxed{F_{act} = 8'08 \ Tn}$$

$$\dot{W}_{act} = F_{act} \times v_{act} = 8'08 \times 10^3 \times 9'81 \times 22'67 \times 10^{-3}$$

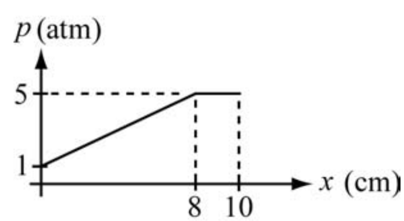
$$\boxed{\dot{W}_{act} = 1797 \ w = 1'797 \ Kw}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 01
Nombre ....

La figura muestra un compresor alternativo de pistón, que se mueve merced a un mecanismo de yugo escocés (Scotch yoke). Un par motor actúa sobre el disco, de 2.3 Kg, y lo hace girar con velocidad angular constante. El disco posee un pequeño saliente circular, que desliza sin rozamiento por la ranura del extremo izquierdo del pistón, produciendo así su movimiento de traslación alternativo. La masa del pistón es de 2.7 Kg.



La presión del gas en el interior del cilindro, de 8 cm de diámetro, comienza siendo de 1 atm (presión en la admisión), aumentando linealmente al avanzar el pistón hasta alcanzar las 5 atm, valor para el cual se abre la válvula de escape, y el gas comienza a salir del cilindro. La mencionada ley de variación de la presión del gas con el avance del pistón se muestra en la siguiente figura:



Si se pretende obtener un caudal de salida de gas a 5 atm de 50 litros/minuto, determinar, sabiendo que 1 atm = 1.033 Kg/cm^2:

a) Velocidad angular a la que debe girar el disco.

b) Par motor que ha de aplicarse al disco en función del ángulo de giro φ, durante la carrera de compresión del gas.

a) El volumen de gas a 5 atm que se produce en una carrera es,

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l = \frac{\pi \times 0'08^2}{4} 0'02 = 3'2 \cdot 10^{-5} \pi \ m^3$$

El tiempo necesario para producir ese volumen es una ida y vuelta del pistón 0, lo que es lo mismo, una vuelta completa del disco.

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \ seg$$

Entonces, el caudal de gas a 5 atm que se produce es,

$$q = \frac{V}{t} = \frac{3'2 \cdot 10^{-5} \pi}{\frac{2\pi}{\omega}} = 1'6 \cdot 10^{-5} \omega \ \frac{m^3}{s} = 1'6 \cdot 10^{-5} \omega \times 60 \times 10^3 =$$

$$= 0'96 \omega \frac{l}{min} = 50 \frac{l}{min} \implies \omega = \frac{50}{0'96} = \boxed{52'083 \frac{rad}{s} = \omega}$$

b) Comencemos calculando la relación entre el avance del cilindro y el giro del disco.

$$x = R(1 - \cos\varphi)$$

con $2R =$ carrera del pistón $= 0'1 \implies R = 0'05 \ m$

$$\underline{x = 0'05(1 - \cos\varphi)} \qquad (1)$$

Entonces, el punto en que la presión pasa de crecer a mantenerse constante es,

$$0'08 = 0'05(1 - \cos\varphi_c) \implies \varphi_c = 126'87^\circ$$

La fuerza sobre el pistón debida a la presión del gas será,

$$F = pA = p\frac{\pi d^2}{4} = \pi p \frac{0'08^2}{4} = 1'6 \cdot 10^{-3} \pi p$$

Así pues, hay que distinguir dos situaciones:

$0 \leq \varphi \leq \varphi_c = 126'87^\circ$

$$F = 1'6 \cdot 10^{-3} \pi \left(1 + \frac{4}{0'08} x\right) \cdot 1'033 \frac{9'81}{10^{-4}} =$$

$$= 509'38 \left(1 + 50x\right) = 509'38 \left[1 + 50 \cdot 0'05 (1 - \cos\varphi)\right]$$

$$F = 509'38 \left[1 + 2'5 (1 - \cos\varphi)\right] = 509'38 \left(3'5 - 2'5 \cos\varphi\right)$$

$\varphi_c \leq \varphi \leq 180^\circ$

$$F = 1'6 \cdot 10^{-3} \pi \cdot 5 \cdot 1'033 \cdot \frac{9'81}{10^{-4}} = 2546'9 \ N$$

Derivando la ecuación (1) se tiene,

$$\dot{x} = 0'05 \dot{\varphi} \operatorname{sen}\varphi = 0'05 \omega \operatorname{sen}\varphi = 0'05 \times 52'083 \operatorname{sen}\varphi =$$

$$= \underline{2'604 \operatorname{sen}\varphi \ m/s = \dot{x} = v}$$

$$\ddot{x} = 0'05 \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = 0'05 \times \omega^2 \cos\varphi = 0'05 \times 52'083^2 \cos\varphi =$$

$$= \underline{135'63 \cos\varphi \ m/s^2 = \ddot{x} = a}$$

Ahora, aplicando el teorema de las potencias virtuales en un punto cualquiera entre $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$ (carrera de compresión), se tiene:

$$T\omega - Fv - mav = 0$$

$$T = \frac{v}{\omega} \left[F + ma\right],$$ donde $m = 0'7$ kg es la masa del pistón.

Entonces, hay que distinguir de nuevo dos situaciones según la expresión aplicable a la fuerza F.

$\underline{0 \leq \varphi < \varphi_c = 126'87^\circ}$

$$T = \frac{2'604 \operatorname{sen}\varphi}{52'083} \left[509'38 \left(3'5 - 2'5 \cos\varphi\right) + 2'7 \times 135'63 \cos\varphi \right] =$$

$$= 0'05 \operatorname{sen}\varphi \left[1782'83 - 907'25 \cos\varphi \right] = \operatorname{sen}\varphi \left(89'14 - 45'36 \cos\varphi \right)$$

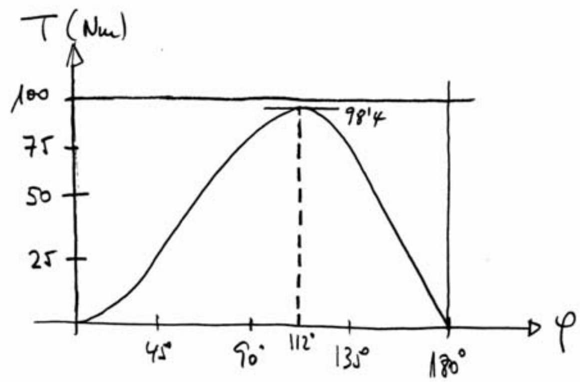
$$\boxed{T(\varphi) = \operatorname{sen}\varphi \left(89'14 - 45'36 \cos\varphi \right)}$$

$\underline{\varphi_c = 126'87^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ}$

$$T = \frac{2'604 \operatorname{sen}\varphi}{52'083} \left[2546'9 + 2'7 \times 135'63 \cos\varphi \right] =$$

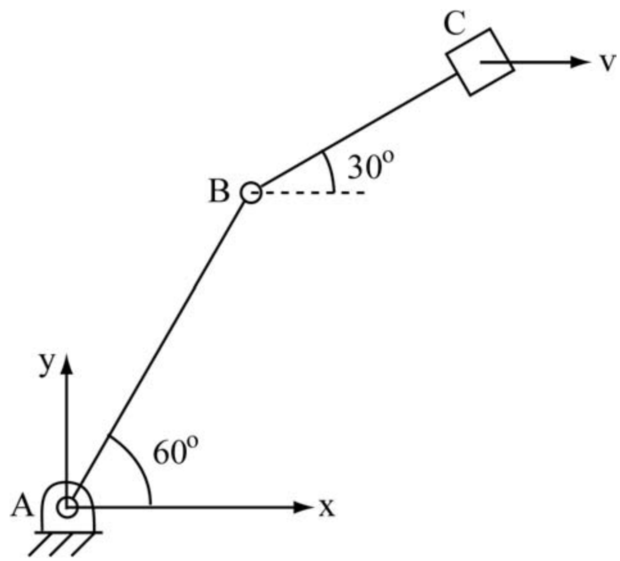
$$= 0'05 \operatorname{sen}\varphi \left[2546'9 + 366'2 \cos\varphi \right] = \operatorname{sen}\varphi \left(127'34 + 18'31 \cos\varphi \right)$$

$$\boxed{T(\varphi) = \operatorname{sen}\varphi \left(127'34 + 18'31 \cos\varphi \right)}$$



Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 01
Nombre ....

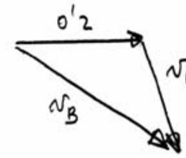
El robot de dos grados de libertad de la figura se compone de una primera barra AB, de 1 m de longitud y 10 Kg de peso, articulada al suelo, y una segunda barra BC, de 0.5 m de longitud y 5 Kg de peso, articulada a la anterior. En las articulaciones A y B se hallan sendos motores rotativos que producen el movimiento del robot.



Si, en la maniobra representada en la figura, el robot porta en su mano una carga de 20 Kg que desplaza horizontalmente hacia la derecha con una velocidad constante de 20 cm/s, determinar las componentes x e y de las fuerzas de reacción en los puntos A y B, así como los pares motores necesarios para producir dicho movimiento.

$$v_B = v_C + v_{B/C}$$

v_B: 30°, ? $\qquad v_C$: 0'2 $\qquad v_{B/C}$: 60°, ?



$$v_{B/C} = 0'2 = \omega_{BC}\, 0'5 \Rightarrow \omega_{BC} = 0'4 \text{ r/s sal}$$

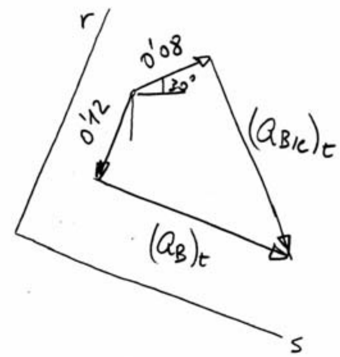
$$v_B = 2\times 0'2 \cos 30 = 0'2\sqrt{3} = 0'3464 = \omega_{AB}\times 1 \Rightarrow \omega_{AB} = 0'3464 \text{ r/s entr}$$

$$a_B = a_C + a_{B/C}$$

$a_C = 0$

a_B: n: 60°, $\omega_{AB}^2\times 1 = 0'12$; t: 30°, ?

$a_{B/C}$: n: 30°, $\omega_{BC}^2\times 0'5 = 0'08$; t: 60°, ?



<u>Proyección r</u>

$$0'12 + 0'08\cos 30 = (a_{B/C})_t \sin 30$$

$$(a_{B/C})_t = 0'3786 = \alpha_{BC}\times 0'5 \Rightarrow \alpha_{BC} = 0'7571 \text{ r/s}^2 \text{ sal}$$

<u>Proyección s</u>

$$(a_B)_t = 0'08 \sin 30 + (a_{B/C})_t \cos 30$$

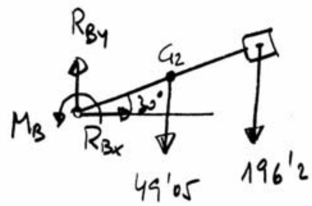
$$(a_B)_t = 0'3679 = \alpha_{AB}\times 1 \Rightarrow \alpha_{AB} = 0'3679 \text{ r/s}^2 \text{ entr}$$

G_1: centro de gravedad de la barra AB.

$$a_{G_1} = \underset{\omega_{AB}^2\times 0'5 \,=\, 0'06 \text{ m/s}^2}{60°} + \underset{\alpha_{AB}\times 0'5 \,=\, 0'1839 \text{ m/s}^2}{30°}$$

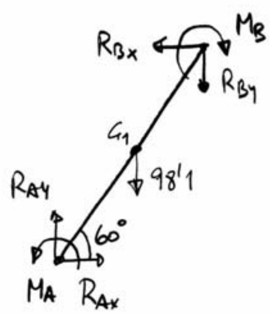
G_2: centro de gravedad de la barra BC.

$$a_{G_2} = a_C + a_{G_2/C} = a_{G_2/C} = \underset{\omega_{BC}^2\times 0'25 \,=\, 0'04 \text{ m/s}^2}{30°} + \underset{\alpha_{BC}\times 0'25 \,=\, 0'1893 \text{ m/s}^2}{60°}$$



$$\begin{cases} R_{Bx} = 5\left(0'04 \cos 30 + 0'1893 \cos 60\right) \\ R_{By} - 245'25 = 5\left(0'04 \operatorname{sen} 30 - 0'1893 \operatorname{sen} 60\right) \\ M_B + R_{Bx}\, 0'25 \operatorname{sen} 30 - \left(R_{By} + 196'2\right) 0'25 \cos 30 = \\ = \left(\frac{1}{12}\, 5 \times 0'5^2\right) 0'7571 \end{cases}$$

$$\boxed{R_{Bx} = 0'6465\ \text{N};\ R_{By} = 244'53\ \text{N};\ M_B = 95'42\ \text{Nm}}$$

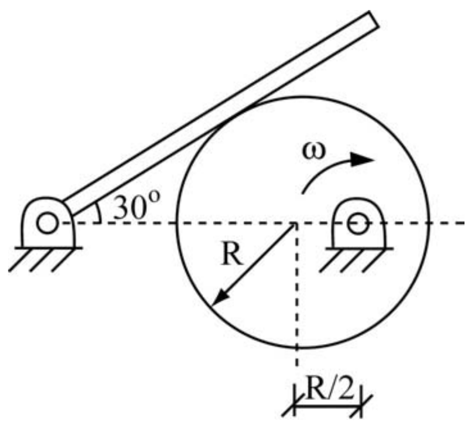


$$\begin{cases} R_{Ax} - R_{Bx} = 10\left(-0'06 \cos 60 + 0'1839 \cos 30\right) \\ R_{Ay} - R_{By} - 98'1 = 10\left(-0'06 \operatorname{sen} 60 - 0'1839 \operatorname{sen} 30\right) \\ M_A - M_B - 98'1 \times 0'5 \cos 60 - R_{By} \times 1 \cos 60 + \\ + R_{Bx} \times 1 \operatorname{sen} 60 = -\left(\frac{1}{3}\, 10 \times 1^2\right) 0'3679 \end{cases}$$

$$\boxed{R_{Ax} = 1'9391\ \text{N};\ R_{Ay} = 341'19\ \text{N};\ M_B = 240'42\ \text{Nm}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Diciembre 01
Nombre ....

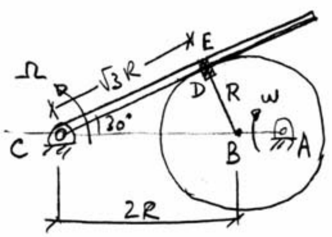
La figura representa a una leva de disco con seguidor oscilante de pie plano. La leva tiene masa *M* uniformemente distribuida, y su perfil es circular de radio *R*. Se halla unida al elemento fijo mediante una articulación situada a R/2 del centro del círculo. El seguidor es una barra de masa también *M*, uniformemente distribuida, y longitud 3*R*. Se halla articulado al elemento fijo en uno de sus extremos. En el contacto entre leva y seguidor hay un coeficiente de rozamiento de valor μ. La gravedad actúa según el plano vertical.



En la posición de la figura, el seguidor forma 30º con la horizontal, y el centro de la leva se encuentra alineado con las articulaciones de leva y seguidor.
Sabiendo que la leva gira con velocidad angular constante ω en el sentido de las agujas del reloj, determinar, para el instante representado en la figura:

a) Velocidad angular del seguidor.
b) Aceleración angular del seguidor.
c) Velocidad de deslizamiento en el contacto entre leva y seguidor.
d) Valor máximo de la velocidad angular de giro de la leva ω, para que el seguidor no pierda el contacto con la leva en la posición indicada.
e) Par motor necesario que debe actuar sobre la leva para lograr el movimiento descrito.

a)



$v_B = v_a + v_r$ (con la barra)

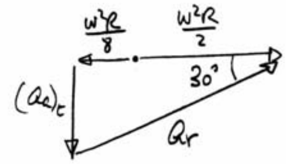
↑ $\frac{\omega R}{2}$? | ∠30° ?

$v_a = \frac{\omega R}{2} = \Omega \cdot 2R \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{\omega}{4}}$ sal

$v_r = 0$

b) $a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con la barra)

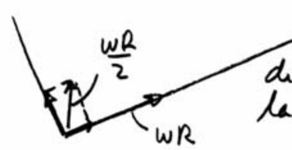
$\xrightarrow{}$ $\frac{\omega^2 R}{2}$; a_a: n ← $\Omega^2 \cdot 2R = \frac{\omega^2 R}{8}$, t |? ; a_r: ∠30° ? ; $a_{cor} = 0$



$$(a_a)_t = \omega^2 R\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) tg\,30 = \frac{5\sqrt{3}}{24}\,\omega^2 R = \alpha \cdot 2R \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{48}\omega^2 \text{ antr.}}$$

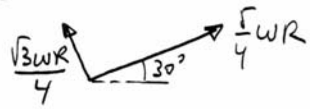
c) $v_D = v_B + v_{D/B}$ =

↑ $\frac{\omega R}{2}$ ∠30° ωR

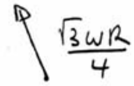


La velocidad de D, como suma de una componente sobre la dirección de la barra y otra normal al contacto es,

v_D =

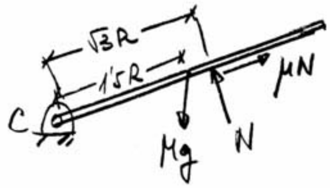


v_E =



Luego $v_{desliz} = \frac{5}{4}\omega R$. Los puntos D y E tienen la misma componente de velocidad según la normal al contacto, pero no así según la tangente, resultando que el punto D de la leva desliza sobre el E del seguidor.

d)



$$N_C = I_C \alpha$$

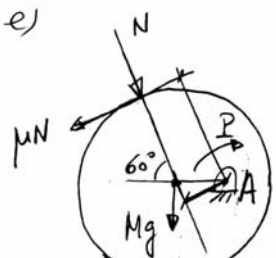
$$Mg\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}R - N\sqrt{3}R = \left[\frac{1}{3}M(3R)^2\right]\frac{5\sqrt{3}}{48}\omega^2$$

$$\boxed{N = \frac{3}{4}Mg - \frac{5}{16}MR\omega^2}$$

El contacto estará a punto de perderse si $N=0$, luego,

$$\boxed{\omega^2 \leq \frac{12g}{5R}}$$

e)



$N_A = 0$, por ser $\dot{\omega} = 0$.

$$P = Mg\frac{R}{2} + N\frac{R}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \mu N\left(R + \frac{R}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}MgR + \frac{\sqrt{3}}{4}R\left(\frac{3}{4}Mg - \frac{5}{16}MR\omega^2\right) +$$

$$+ \frac{5}{4}\mu R\left(\frac{3}{4}Mg - \frac{5}{16}MR\omega^2\right) =$$

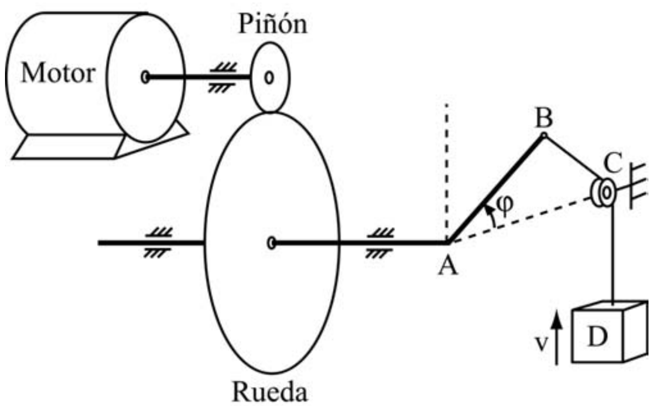
$$= \frac{1}{2}MgR + \frac{3\sqrt{3}}{16}MgR - \frac{5\sqrt{3}}{64}MR^2\omega^2 + \frac{15}{16}\mu MgR - \frac{25}{64}\mu MR^2\omega^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{15\mu}{16}\right)MgR - \frac{5\sqrt{3} + 25\mu}{64}MR^2\omega^2 =$$

$$= \boxed{\frac{8 + 3\sqrt{3} + 15\mu}{16}MgR - \frac{5\sqrt{3} + 25\mu}{64}MR^2\omega^2 = P}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 02
Nombre ....

El sistema de la figura está formado por un motor, que mueve al conjunto, en cuya salida se halla un piñón cilíndrico de dientes rectos y momento de inercia respecto a su eje de valor I, que engrana con una rueda cuyo número de dientes es cinco veces mayor. El eje de la rueda hace un codo en ángulo recto en su extremo derecho A, prolongándose como una barra AB, de longitud l y masa m. En el extremo B de dicha barra, se encuentra atado un cable inextensible que, tras pasar por una pequeña polea C anclada a la pared, soporta un bloque D de masa M. La distancia AC es igual a la longitud de la barra AB.



Sabiendo que el movimiento que se pretende lograr consiste en que el ángulo φ que forma la barra AB con la horizontal varíe de 0º a 90º, provocando que el bloque ascienda con velocidad constante v, determinar:

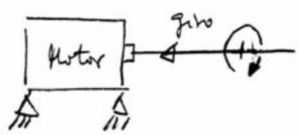
a) Momento de inercia de la rueda respecto a su eje.
b) Sentido de giro del motor.
c) Relación, en función del ángulo φ, entre la velocidad angular del conjunto "eje de la rueda - barra AB" y la velocidad de ascenso del bloque, v.
d) Relación, en función del ángulo φ, entre la aceleración angular del conjunto "eje de la rueda - barra AB" y la velocidad de ascenso del bloque, v.
e) Par motor que ha de proporcionar el motor, en función del ángulo φ.

Nota: se considera que el momento de inercia de los engranajes respecto a su eje es proporcional al radio de los mismos elevado a la cuarta potencia.

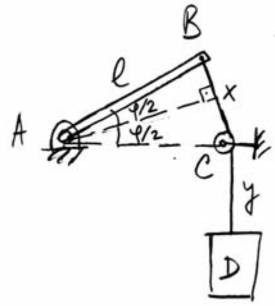
a) $I_{Piñón} = I = k r^4 \Rightarrow k = \frac{I}{r^4}$

$$\boxed{I_{Rueda} = k R^4 = \frac{I}{r^4} R^4 = I\left(\frac{R}{r}\right)^4 = I \cdot 5^4 = 625\, I}$$

b)



c)



$x = 2l \operatorname{sen} \varphi/2$

$x + y = C^{te} = \text{longitud del cable}$

$y = C^{te} - x = C^{te} - 2l \operatorname{sen} \varphi/2$

$\dot{y} = -\dot{x} = -l\dot{\varphi}\cos\varphi/2 = -v$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{v}{l\cos\varphi/2}}$$

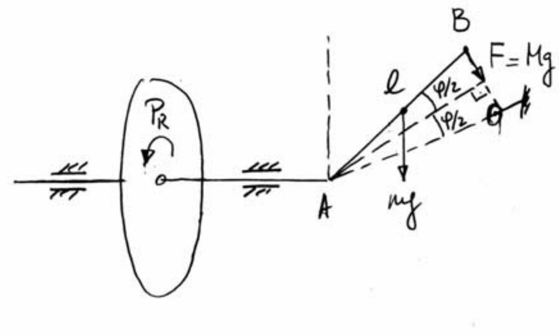
d) $l\dot{\varphi}\cos\varphi/2 = v$

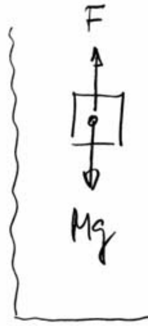
$\cancel{l}\ddot{\varphi}\cos\varphi/2 - \frac{\cancel{l}}{2}\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\varphi/2 = 0$

$\ddot{\varphi}\cos\varphi/2 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{l^2\cos^2\varphi/2}\operatorname{sen}\varphi/2 = 0$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{v^2}{2l^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi/2}{\cos^2\varphi/2}}$$

e) Llamando P_R al par que actúa sobre la rueda, se puede plantear la ecuación de momentos alrededor del eje de la rueda.





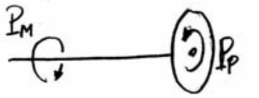
$F - Mg = 0$

$F = Mg$

$$P_R - mg\frac{l}{2}\cos\varphi - Mgl\cos\varphi/2 = \left(I_R + \frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\varphi}$$

$$P_R = \left(625\,I + \frac{ml^2}{3}\right)\frac{v^2}{2l^2}\cdot\frac{tg\,\varphi/2}{\cos^2\varphi/2} + mg\frac{l}{2}\cos\varphi + Mgl\cos\varphi/2$$

Ahora, tomando la ecuación de momentos alrededor del eje del piñón, se tiene, llamando P_M al par del motor, y P_P al par resistente en el piñón,



$P_M - P_P = I\alpha$, donde $\alpha = 5\ddot{\varphi}$ y $P_P = \frac{P_R}{5}$. Entonces,

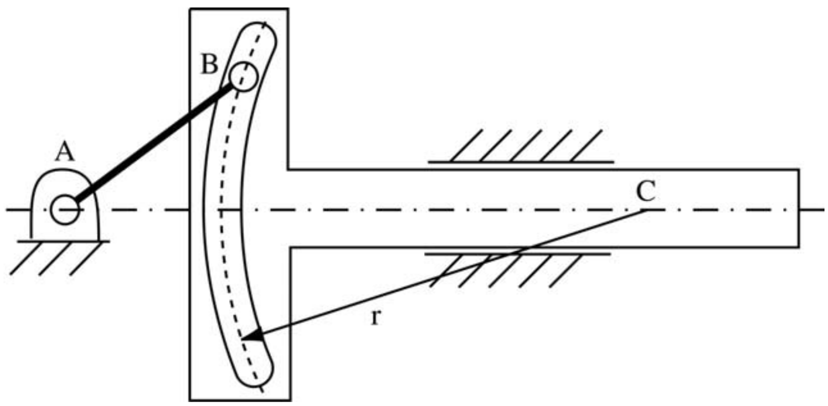
$$P_M - \frac{P_R}{5} = 5I\ddot{\varphi} \Rightarrow P_M = \frac{1}{5}\left(P_R + 25I\ddot{\varphi}\right)$$

Sustituyendo el valor de P_R obtenido arriba,

$$\boxed{P_M = \frac{1}{5}\left[\left(650\,I + \frac{ml^2}{3}\right)\frac{v^2}{2l^2}\cdot\frac{tg\,\varphi/2}{\cos^2\varphi/2} + mg\frac{l}{2}\cos\varphi + Mgl\cos\varphi/2\right]}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 02
Nombre ....

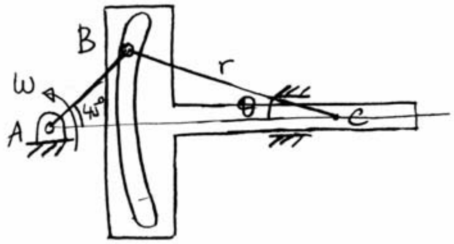
La figura muestra un mecanismo que permite transformar el movimiento rotativo continuo de la manivela AB, en un movimiento alternativo de traslación de la pieza en forma de T tumbada. La manivela tiene masa de 1 Kg, y su longitud es AB = 1 m, y, en la posición representada, forma un ángulo de 45º con la horizontal. El extremo de la manivela, B, puede girar y deslizar en la ranura en forma de arco de circunferencia con centro en C que posee la pieza en forma de T tumbada, de masa 2 Kg, siendo el radio de dicho arco $r = \sqrt{2}$ m.



Si la manivela gira con velocidad angular constante ω saliente, y el sistema se halla bajo la acción de la gravedad, determinar, en el instante representado:
a) Velocidad de la pieza en forma de T tumbada.
b) Aceleración de la pieza en forma de T tumbada.
c) Par motor que debe proporcionar un motor rotativo situado en A para que el movimiento sea el descrito.

Y, para un instante cualquiera, obtener:
d) Relación analítica entre la posición de la pieza en forma de T tumbada y la posición de la manivela.
e) Relación analítica entre la velocidad de la pieza en forma de T tumbada y la velocidad angular de la manivela.

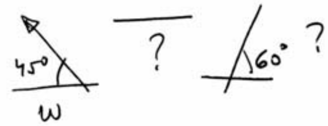
Por último,
f) Comprobar, particularizando la relación obtenida en el apartado (e) para la posición mostrada en la figura, la coincidencia con el resultado del apartado (a).



$AB \operatorname{sen} 45 = r \operatorname{sen} \theta$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \underline{\theta = 30^\circ}$

a) $v_B = v_a + v_r$ (con pieza T)



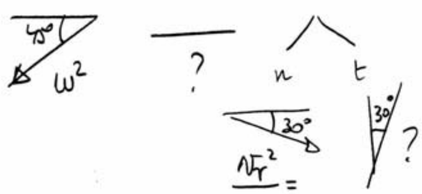
$v_r \operatorname{sen} 60 = \omega \operatorname{sen} 45 \rightarrow v_r = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\omega$

$v_a = v_r \cos 60 + \omega \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\omega \frac{1}{2} + \omega\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\omega \leftarrow} =$

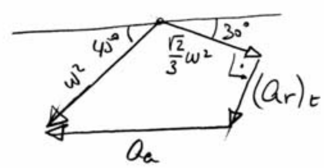
$= \boxed{v_{\text{pieza T}}}$

b) $a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con pieza T)

$a_{cor} = 0$ (por ser $\omega_a = 0$)



$\frac{v_r^2}{r} = \frac{2}{3}\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega^2$



$\omega^2 \operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega^2 \operatorname{sen} 30 + (a_r)_t \operatorname{sen} 60$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(a_r)_t \rightarrow (a_r)_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\omega^2$

$(a_r)_t = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\omega^2$

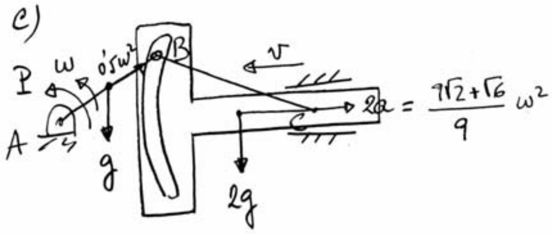
$$a_a + (a_r)_t \cos 60 = \omega^2 \cos 45 + \frac{\sqrt{2}}{3}\omega^2 \cos 30$$

$$a_a = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\omega^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\omega^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)\omega^2 =$$

$$= \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}\omega^2 = \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}\omega^2 = \boxed{\frac{9\sqrt{2}+\sqrt{6}}{18}\omega^2 \ \leftarrow} =$$

$$= \boxed{a_{pieza\,T}}$$

c)



La determinación del par motor puede realizarse fácilmente aplicando el Principio de Potencias Virtuales, con el campo de velocidades real.

$$P\omega - g\,\frac{1}{2}\omega\cos 45 - 2a\cdot v = 0$$

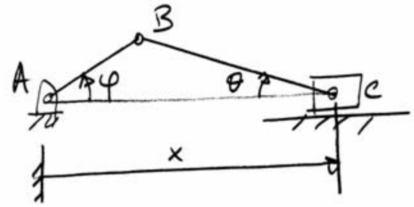
$$\cancel{P\omega} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}g\cancel{\omega} - \frac{9\sqrt{2}+\sqrt{6}}{9}\omega^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cancel{\omega} = 0$$

$$P = \frac{\sqrt{2}}{4}g + \frac{18+2\sqrt{3}}{18}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)\omega^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}g + \frac{18\sqrt{3}+18+6+2\sqrt{3}}{18\sqrt{3}}\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}g + \frac{20\sqrt{3}+24}{18\sqrt{3}}\omega^2$$

$$\boxed{P = \frac{\sqrt{2}}{4}g + \frac{10\sqrt{3}+12}{9\sqrt{3}}\omega^2}$$

d) El mecanismo es equivalente a un biela-manivela, donde la biela conectaría los puntos B y C. Entonces, se puede escribir,



$$AB \,\text{sen}\,\varphi = BC \,\text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{AB}{BC}\,\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\varphi$$

$$x = AB\cos\varphi + BC\cos\theta = \cos\varphi + \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\,\text{sen}^2\varphi}$$

$$\boxed{x = \cos\varphi + \sqrt{2 - \text{sen}^2\varphi}}$$

e) Derivando la expresión anterior,

$$\dot{x} = -\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi + \frac{-2\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}{2\sqrt{2 - \text{sen}^2\varphi}}$$

$$\boxed{\dot{x} = -\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi\left[1 + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2 - \text{sen}^2\varphi}}\right]}$$

f) Tomando $\varphi = 45°$, $\dot{\varphi} = \omega$, se tiene,

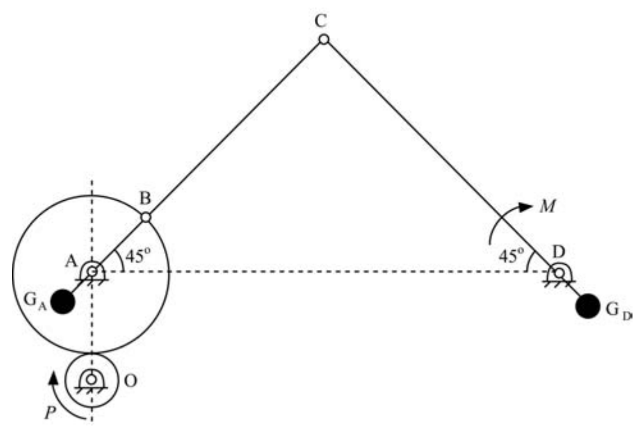
$$v_{\text{pieza T}} = -\omega\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2 - \frac{1}{2}}}\right] =$$

$$= -\omega\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\omega \leftarrow}$$

idéntico al resultado del apartado (a).

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 03
Nombre ....

La figura muestra un cuadrilátero articulado manivela-balancín. Para adecuar las características de velocidad de rotación y par requeridos a la entrada del mecanismo, se ha situado el motor propulsor en el eje O, transmitiendo su potencia al eje de la manivela mediante un par de engranajes normales de módulo 1 mm. El piñón en O posee 20 dientes, mientras que la rueda en A, que se mueve siempre solidaria a la manivela, tiene 60 dientes. Las barras del mecanismo tienen la masa uniformemente repartida, y presentan una densidad lineal de 3 gramos/mm. Las longitudes cumplen: $\overline{BC} = 3\overline{AB}$, $\overline{CD} = 4\overline{AB}$.



Para equilibrar la manivela y el balancín, es decir, para conseguir que sus centros de masas se encuentren sobre los ejes A y D, respectivamente, ambas barras se han alargado, habiéndoseles añadido sendas masas puntuales en sus extremos, G_A y G_D. Las distancias alargadas son: $\overline{AG_A} = \overline{DG_D} = 0.5\overline{AB}$.

a) Determinar qué masas son necesarias en G_A y G_D para equilibrar la manivela y el balancín, respectivamente.

Sabiendo que el piñón en O gira con velocidad angular constante ω=600 rpm en sentido horario (entrante), que el sistema se halla sometido a la acción de la gravedad (g=9.81 m/s^2), y que se debe vencer un par resistente a la salida (balancín) de valor constante M=1 Nm, calcular, en la posición de la figura:

b) Velocidades y aceleraciones angulares de todos los elementos.

c) Fuerzas y momentos aplicados y de inercia que actúan sobre el mecanismo.

d) Par motor P necesario en O.

e) Fuerza normal de contacto entre los dientes de los engranajes.

a) El radio de la rueda es, $R = \frac{m z_A}{2} = \frac{1\times 60}{2} = 30 \text{ mm} = \overline{AB}$.

Entonces, $\overline{AG_A} = 0'5\,\overline{AB} = 0'5\times 30 = 15$ mm

Para equilibrar la manivela, se ha de cumplir,

$$m_{AB}\times d_{G_{AB}} = m_{AG_A}\, d_{G_{AG_A}} + m_{G_A}\cdot d_{G_A}$$

$$(3\times30)\times15 = (3\times15)\times7'5 + m_{G_A}\times15 \longrightarrow \boxed{m_{G_A}=67'5\ g}$$

Y para el balancín, análogamente, sabiendo que $\overline{CD}=4\overline{AB} = 4\times30 = 120$ mm, y que $\overline{DG_D} = 0'5\,\overline{AB} = 0'5\times30=15$ mm,

$$(3\times120)\times60 = (3\times15)\times7'5 + m_{G_D}\times15 \longrightarrow \boxed{m_{G_D}=1417'5\ g}$$

b) Ahora vamos a resolver la cinemática del mecanismo en la posición de la figura. $\omega_0 = 600 \text{ rpm} = 600\,\frac{2\pi}{60} = 20\pi \text{ r/s}$

$$\frac{\omega_A}{\omega_0} = \frac{z_0}{z_A} = \frac{20}{60}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\omega_A = \frac{1}{3}\omega_0 = \frac{\omega}{3} = \frac{20\pi}{3}\text{ r/s horal}}$$

$\boxed{\omega_{AB} = \omega_A = \frac{\omega}{3} = \frac{20\pi}{3}\text{ r/s horal}}$ por tener la rueda A y la manivela AB movimiento solidario.

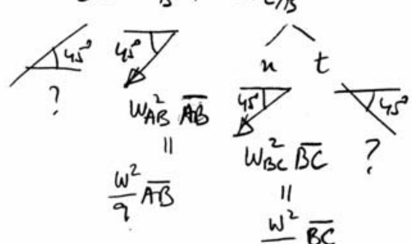
$$v_C = v_B + v_{C/B} \qquad \overline{BC} = 3\,\overline{AB} = 3\times30 = 90 \text{ mm}$$

$$v_C = 0 = \omega_{CD}\,\overline{CD} \Rightarrow \boxed{\omega_{CD}=0}$$

$$v_{C/B} = v_B = \omega_{AB}\,\overline{AB} = \frac{\omega}{3}\overline{AB} = \omega_{BC}\,\overline{BC} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_{BC} = \frac{\omega}{9} = \frac{20\pi}{9}\text{ r/s antihor}}$$

$$a_C = a_B + a_{C/B}$$

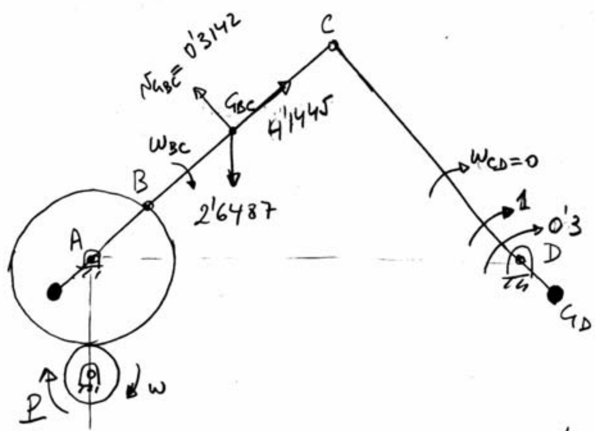


$$a_{C/B} = 0 = \alpha_{BC}\cdot\overline{BC} \Rightarrow \boxed{\alpha_{BC}=0}$$

$$a_C = \frac{\omega^2}{9}\overline{AB} + \frac{\omega^2}{81}\overline{BC} = \omega^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)\overline{AB}$$

$$a_C = \frac{4w^2}{27}\overline{AB} = \alpha_{CD}\overline{CD} \Rightarrow \boxed{\alpha_{CD} = \frac{w^2}{27} = \frac{400\pi^2}{27}\ r/s^2\ \circlearrowleft}$$

c) A continuación, se calculan las fuerzas aplicadas y de inercia, que actúan sobre el mecanismo.



Peso barra BC:

$(90\times 3)\cdot 10^{-3}\times 9'81 = 2'6487\ N$

Aceleración de G_{BC}:

$$a_{G_{BC}} = a_B + a_{G_{BC}/B}$$

$45°$ $45°$

$\frac{w^2}{9}\overline{AB}$ $\quad \frac{w^2}{81}\frac{\overline{BC}}{2}$

$$a_{G_{BC}} = w^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{54}\right)\overline{AB} = \frac{7w^2}{54}\overline{AB} =$$

$$= \frac{7}{54}400\pi^2\times 30\cdot 10^{-3} = 15'35\ m/s^2$$

$45°$

Resultante de las fuerzas de inercia en BC:

$F_i = -m_{BC}\,a_{G_{BC}} = -(90\times 3)\cdot 10^{-3}\times 15'35 =$

$= -4'1445\ N$

Momento de inercia de la barra CG_D en D (centro de gravedad):

$$I = \frac{1}{3}m_{CD}\overline{CD}^2 + \frac{1}{3}m_{DG_D}\overline{DG_D}^2 + m_{G_D}\overline{DG_D}^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(120\times 3)\cdot 10^{-3}\right]0'12^2 + \frac{1}{3}\left[(15\times 3)\cdot 10^{-3}\right]\times 0'015^2 + 1'4175\times 0'015^2 =$$

$$= 0'00205\ kg\cdot m^2$$

Momento resultante de las fuerzas de inercia de la barra CG_D en D:

$$M_i = -I\alpha_{CD} = -0'00205\times\frac{400\pi^2}{27} = -0'3\ Nm$$

d) Ahora se puede aplicar el principio de potencias virtuales, utilizando el propio campo de velocidades real para obtener el par motor P.

Velocidad de G_{BC}: $\quad v_{G_{BC}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v_C}} + v_{G_{BC}/C}$

$$\omega_{BC}\,\overline{G_{BC}C} = \frac{20\pi}{9}\times 0'045 = $$

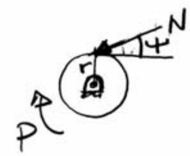
$$= 0'3142 \text{ m/s}$$

$\dot{W}^* = 0$

$$P\times 20\pi - 2'6487\times 0'3142\times \cos 45 = 0 \Rightarrow \boxed{P = 0'009366 \text{ Nm}}$$

e) Para conocer la fuerza normal de contacto entre los dientes de los engranajes, basta con aislar el piñón.

El radio del piñón es,



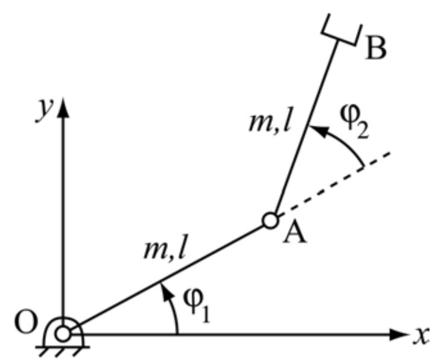
$$r = \frac{m z_0}{2} = \frac{1\times 20}{2} = 10 \text{ mm}$$

$$P = N r \cos\psi \Rightarrow N = \frac{P}{r\cos\psi} = \frac{0'009366}{0'01\cos 20^\circ}$$

$$\boxed{N = 0'9967 \text{ N}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 03
Nombre ....

La figura muestra un manipulador plano de 2 grados de libertad, sometido a la acción gravitatoria, cuyos brazos tienen masa *m* y longitud *l*. Sendos motores rotativos en O y A proporcionan los pares $P_1(t)$ y $P_2(t)$, respectivamente, que sirven para controlar el movimiento del robot.



Tomando como coordenadas del problema los ángulos φ_1 y φ_2 que se indican en la figura, obtener:
a) Energía cinética del brazo OA.
b) Energía cinética del brazo AB.
c) Energía potencial del conjunto.
d) Ecuaciones diferenciales del movimiento del manipulador.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento se pueden expresar de la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_\mathrm{m} + \mathbf{Q}_\mathrm{g} + \mathbf{Q}_\mathrm{v}$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de masas, $\ddot{\mathbf{q}}$ son las aceleraciones, $\mathbf{Q}_\mathrm{m}$ es el vector de fuerzas generalizadas debidas a los motores, $\mathbf{Q}_\mathrm{g}$ es el vector de fuerzas generalizadas debidas a la gravedad, y $\mathbf{Q}_\mathrm{v}$ es el vector de fuerzas generalizadas dependientes de la velocidad, también llamadas centrífugas y de Coriolis.
e) Expresar en la forma indicada las ecuaciones del movimiento obtenidas en el apartado anterior, y determinar el valor de $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}_\mathrm{m}$, $\mathbf{Q}_\mathrm{g}$ y $\mathbf{Q}_\mathrm{v}$.
f) ¿Qué propiedad posee la matriz **M**?
g) Verificar que la energía cinética total del sistema es $T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\mathrm{t}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$.

a) $\boxed{T_{OA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m l^2\right)\dot\varphi_1^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot\varphi_1^2}$

b) Para calcular la energía cinética del brazo AB, lo primero es obtener la velocidad de su centro de masas al cuadrado.

$$\begin{cases} x_{G_2} = l\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ y_{G_2} = l\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + \frac{l}{2}\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_{G_2} = -l\dot\varphi_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 - \frac{l}{2}(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2)\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2) \\ \dot y_{G_2} = l\dot\varphi_1\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{cases}$$

$$v_{G_2}^2 = \dot x_{G_2}^2 + \dot y_{G_2}^2 = l^2\dot\varphi_1^2 + \frac{l^2}{4}(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2)^2 + l^2\dot\varphi_1(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2)\cos\varphi_2 =$$

$$= l^2\dot\varphi_1^2\left(\frac{5}{4}+\cos\varphi_2\right) + \frac{l^2}{4}\dot\varphi_2^2 + l^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\left(\frac{1}{2}+\cos\varphi_2\right) = v_G^2$$

$$\boxed{T_{AB} = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m l^2\right)(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2)^2 =}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} m l^2\dot\varphi_1^2\left(\frac{4}{3}+\cos\varphi_2\right) + \frac{1}{6} m l^2\dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2} m l^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right)}$$

c) $$\boxed{V = mg\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + mg\left(l\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + \frac{l}{2}\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2)\right) =}$$

$$\boxed{= \frac{3}{2} mgl\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 + \frac{1}{2} mgl\,\mathrm{sen}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

d) $T = T_{OA} + T_{AB} =$

$$= \frac{1}{2} m l^2\dot\varphi_1^2\left(\frac{5}{3}+\cos\varphi_2\right) + \frac{1}{6} m l^2\dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2} m l^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{5}{3} + \cos\varphi_2\right) + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right) -$$

$$- \frac{3}{2} m g l \operatorname{sen}\varphi_1 - \frac{1}{2} m g l \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = m l^2 \dot{\varphi}_1 \left(\frac{5}{3} + \cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_2 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = m l^2 \ddot{\varphi}_1 \left(\frac{5}{3} + \cos\varphi_2\right) - m l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \operatorname{sen}\varphi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m l^2 \ddot{\varphi}_2 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right) - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = - \frac{3}{2} m g l \cos\varphi_1 - \frac{1}{2} m g l \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} & m l^2 \left(\frac{5}{3} + \cos\varphi_2\right) \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right) \ddot{\varphi}_2 - m l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - \\ & - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2 + \frac{3}{2} m g l \cos\varphi_1 + \frac{1}{2} m g l \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = P_1(t) \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m l^2 \ddot{\varphi}_1 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right) - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \operatorname{sen}\varphi_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1^2 \operatorname{sen}\varphi_2 - \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - \frac{1}{2} m g l \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{2}{3} + \cos\varphi_2\right) \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_1^2 \operatorname{sen}\varphi_2 + \\ & + \frac{1}{2} m g l \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = P_2(t) \end{aligned}}$$

e) Las ecuaciones del movimiento obtenidas se pueden expresar,

$$\overbrace{\begin{bmatrix} ml^2\left(\frac{5}{3}+\cos\varphi_2\right) & \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right) \\ \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right) & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}}^{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}}_{Q_m} \underbrace{- mgl \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}\cos\varphi_1 + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2) \\ \frac{1}{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{Bmatrix}}_{Q_g} \underbrace{+ ml^2 \begin{Bmatrix} \left(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2\right)\operatorname{sen}\varphi_2 \\ -\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2\operatorname{sen}\varphi_2 \end{Bmatrix}}_{Q_v}$$

f) La matriz de masa, M, es simétrica.

g) $$T = \frac{1}{2}\{\dot{\varphi}_1\ \dot{\varphi}_2\}\, ml^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{3}+\cos\varphi_2 & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right) & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2\left(\frac{5}{3}+\cos\varphi_2\right) + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\left(\frac{2}{3}+\cos\varphi_2\right)$$

que coincide con la energía cinética total del manipulador, obtenida en el apartado d).