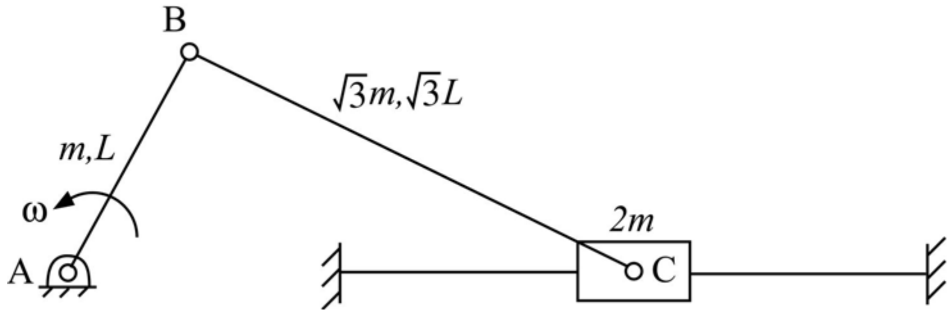
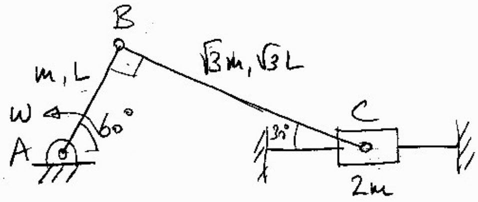
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 07
Nombre ....

La figura muestra un mecanismo biela-manivela. La manivela posee masa m y longitud L, la biela masa $\sqrt{3}m$ y longitud $\sqrt{3}L$, y el bloque masa $2m$. En la posición mostrada, la manivela forma un ángulo de 60º con la horizontal, y la biela se encuentra perpendicular a la manivela. La manivela gira con velocidad angular constante ω en sentido antihorario. El mecanismo, sometido a la acción de la gravedad g, se mueve merced a un motor rotativo ubicado en la articulación A.

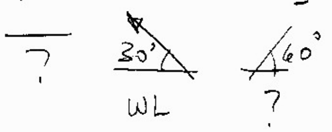


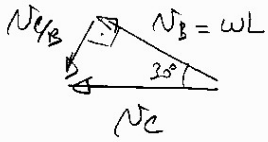
En la situación indicada:

a) Obtener la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del bloque C.
b) Obtener la aceleración angular de la barra BC y la aceleración del bloque C.
c) Dibujar los diagramas de sólido libre de la manivela, la biela, y el bloque, indicando claramente sobre ellos las fuerzas (y momentos) aplicadas y de enlace.
d) Escribir las ecuaciones de Newton-Euler para la manivela, la biela, y el bloque.



$v_C = v_B + v_{C/B}$

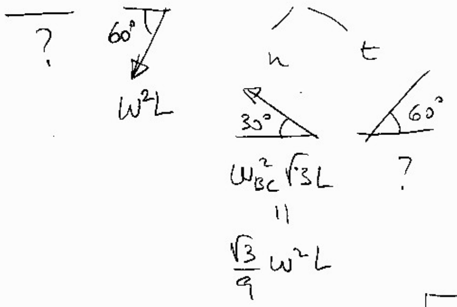


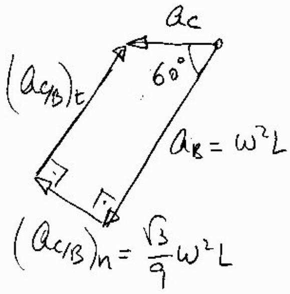


$v_{C/B} = \omega L \, tg\, 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega L = \omega_{BC}\sqrt{3}\, L \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = \frac{\omega}{3} \text{ antr}}$

$\boxed{v_C = \frac{\omega L}{\cos 30} = \frac{2\omega L}{\sqrt{3}} \leftarrow}$

$a_C = a_B + a_{C/B}$





$a_C \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{9}\omega^2 L \rightarrow \boxed{a_C = \frac{2}{9}\omega^2 L \leftarrow}$

$\omega^2 L = (a_{C/B})_t + \frac{2}{9}\omega^2 L \cos 60° \longrightarrow (a_{C/B})_t = \frac{8}{9}\omega^2 L =$

$= \alpha_{BC}\sqrt{3}\, L \longrightarrow \boxed{\alpha_{BC} = \frac{8}{9\sqrt{3}}\omega^2 \text{ hor}}$

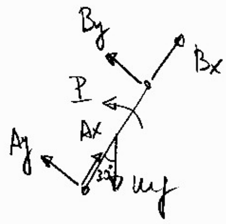
$$a_{G_{BC}} = a_B + a_{G_{BC}/B} =$$

a_B: 60°, $\omega^2 L$

n: 30°, $\omega_{BC}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{\sqrt{3}}{18}\omega^2 L$

t: 60°, $\alpha_{BC} \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{4}{9}\omega^2 L$

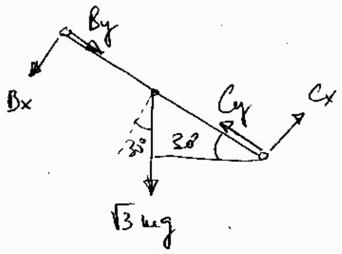
$= \frac{\sqrt{3}}{18}\omega^2 L$ (30°), $\frac{5}{9}\omega^2 L$ (60°)



$$A_x + B_x - mg\frac{\sqrt{3}}{2} = -m\omega^2\frac{L}{2} \quad (1)$$

$$A_y + B_y - mg\frac{1}{2} = 0 \quad (2)$$

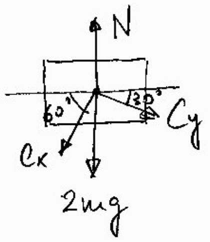
$$P + B_y L - mg\frac{1}{2}\frac{L}{2} = 0 \quad (3)$$



$$B_x - C_x + \sqrt{3}mg\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m\frac{5}{9}\omega^2 L \quad (4)$$

$$C_y - B_y - \sqrt{3}mg\frac{1}{2} = \sqrt{3}m\frac{\sqrt{3}}{18}\omega^2 L \quad (5)$$

$$C_x\frac{\sqrt{3}L}{2} + B_x\frac{\sqrt{3}L}{2} = \frac{1}{12}\sqrt{3}m\,3L^2\frac{8}{9\sqrt{3}}\omega^2 \quad (6)$$

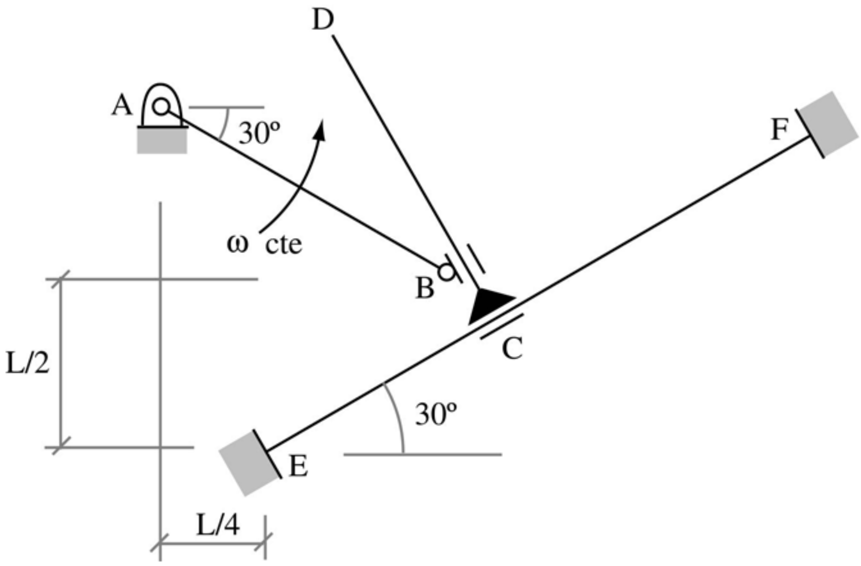


$$C_x\frac{1}{2} - C_y\frac{\sqrt{3}}{2} = 2m\frac{2}{9}\omega^2 L \quad (7)$$

$$N - 2mg - C_x\frac{\sqrt{3}}{2} - C_y\frac{1}{2} = 0 \quad (8)$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Diciembre 07
Nombre ....

En el mecanismo de la figura, la barra AB posee longitud *L*, y la barra CD, también de longitud *L*, se mantiene perpendicular a la guía recta fija EF. En la posición representada, la distancia horizontal desde A hasta E es *L*/4, y la distancia vertical desde B hasta E es *L*/2.



a) Determinar el número de grados de libertad del mecanismo.
b) Calcular las distancias BC y EC en la posición de la figura.
c) Si la barra AB se mueve con velocidad angular constante ω, obtener la velocidad del punto C de la barra CD.
d) Obtener también la aceleración del punto C de la barra CD.
e) Si el mecanismo es movido mediante un motor rotativo situado en A, la barra AB posee masa despreciable, y la barra CD posee masa *M*, calcular, en la posición representada: par aplicado por el motor rotativo en A, y reacciones en las uniones A, B y C. El sistema se halla sometido a la acción de la gravedad.

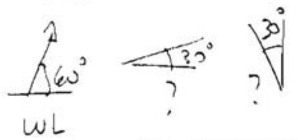
a) $n = 3$, $p_I = 2$, $p_{II} = 1$

$$g = 3(3-1) - 2\times 2 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{g = 1}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} BC + \frac{1}{2} EC &= \frac{L}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} L + \frac{1}{2} BC &= \frac{L}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} EC \end{aligned}\right\} \quad BC = \frac{L}{8}, \quad EC = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) L$$

c) $v_B = v_a + v_r$ (con CD)

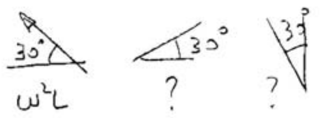


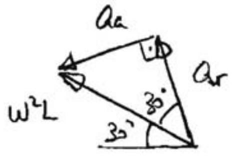
$$v_a = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega L = v_C} \quad ; \quad v_r = \frac{1}{2}\omega L$$

30°

d) $a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con CD)

$a_{cor} = 0$



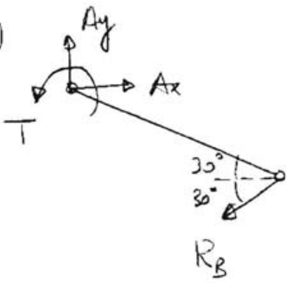


$$a_a = \omega^2 L \,\text{sen}\, 30 \longrightarrow a_a = \boxed{\frac{1}{2}\omega^2 L = a_c}$$

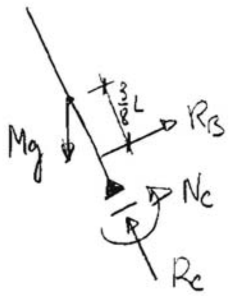
30°

$$a_r = \omega^2 L \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 L$$

e)



$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} R_B L = T & (1) \\ A_x = \frac{\sqrt{3}}{2} R_B & (2) \\ A_y = \frac{1}{2} R_B & (3) \end{cases}$$



$$\begin{cases} R_B - \frac{1}{2} Mg = -\frac{1}{2} M\omega^2 L & (4) \\ R_C - \frac{\sqrt{3}}{2} Mg = 0 & (5) \\ N_C + \frac{3}{8} R_B L = 0 & (6) \end{cases}$$

(4) $R_B = \frac{1}{2} M \left(g - \omega^2 L\right)$

(5) $R_C = \frac{\sqrt{3}}{2} Mg$

(6) $N_C = -\frac{3}{16} ML \left(g - \omega^2 L\right)$

(1) $T = \frac{\sqrt{3}}{4} ML \left(g - \omega^2 L\right)$

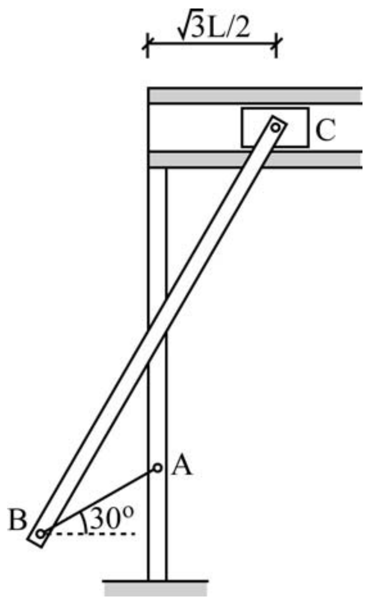
(2) $A_x = \frac{\sqrt{3}}{4} M \left(g - \omega^2 L\right)$

(3) $A_y = \frac{1}{4} M \left(g - \omega^2 L\right)$

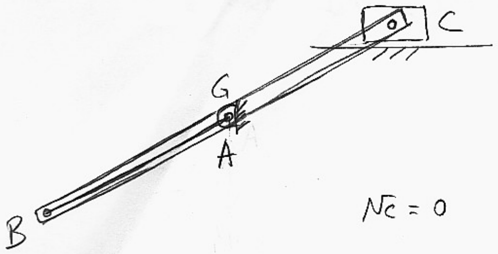
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 09

Nombre ....

La figura muestra el mecanismo de apertura y cierre de una puerta de garaje. El accionamiento de la puerta se realiza mediante un motor eléctrico rotativo situado en la articulación A, que proporciona un par motor a la barra AB. Dicha barra posee longitud L y masa despreciable. La puerta del garaje, representada por la barra BC, tiene masa M y longitud 2L. La masa del bloque C, que se mueve sobre la deslizadera horizontal fija, puede también despreciarse.



Si se desea que la puerta del garaje, sometida a la acción de la gravedad, se cierre con velocidad angular constante $\omega_{BC} = \omega$, calcular el par que debe proporcionar el motor en la posición del mecanismo representada en la figura.



$$v_B = v_C + v_{B/C}$$

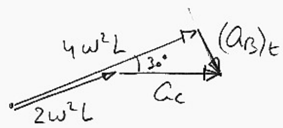
60° ; ? ; 60°, $2\omega L$

$v_C = 0$; ↓ $v_B = 2\omega L = \omega_{AB} L$

$\omega_{AB} = 2\omega$ ↻ sal

$$a_B = a_C + a_{B/C}$$

n: 30°, $\omega_{AB}^2 L = 4\omega^2 L$; t: 60°, ? ; ? ; 30°, $2\omega^2 L$



$$a_C = \frac{2\omega^2 L}{\cos 30^\circ} = \frac{4\omega^2 L}{\sqrt{3}} \longrightarrow$$

$$(a_B)_t = 2\omega^2 L \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 L = \alpha_{AB} L \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 \text{ sal}$$

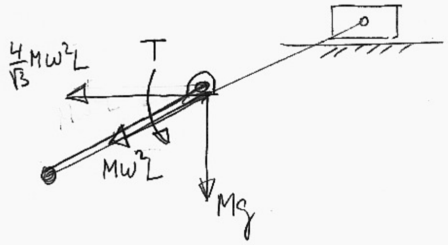
Ahora ya se puede calcular la velocidad y aceleración del centro de gravedad de la puerta.

$$v_G = v_C + v_{G/C} \Rightarrow v_G = \;60^\circ,\ \omega L$$

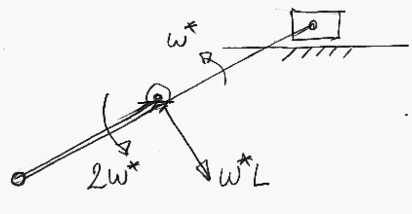
$v_C = 0$; $v_{G/C}$: 60°, ωL

$$a_G = a_C + a_{G/C}$$

$a_C = \frac{4\omega^2 L}{\sqrt{3}}$ → ; $a_{G/C}$: 30°, $\omega^2 L$



Fuerzas aplicadas y de inercia



Velocidades virtuales (= veloc. reales)

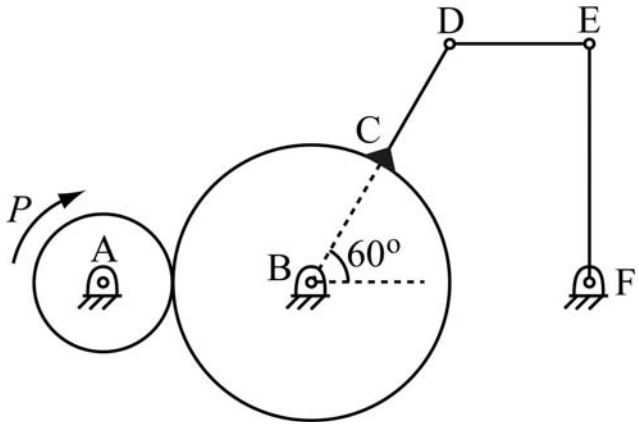
$$\dot{W}^* = 2T\cancel{\omega^*} + Mg\cancel{\omega^*}L\cos 30^\circ - \frac{4}{\sqrt{3}}M\omega^2 L\cancel{\omega^*}L\cos 60^\circ = 0$$

$$2T = \frac{4}{\sqrt{3}}M\omega^2 L^2 \frac{1}{2} - MgL\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{\sqrt{3}}{3}M\omega^2 L^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}MgL}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 09
Nombre ....

El mecanismo de la figura está formado por el piñón de entrada A, de masa M, la rueda B, de masa $2M$ y radio R, la barra CD, de masa M y longitud R, rígidamente unida a la rueda B, la barra DE, de masa M y longitud R, y la barra EF, de masa M y longitud $\sqrt{3}R$. Piñón y rueda son normales y poseen el mismo módulo, teniendo la rueda doble número de dientes que el piñón.



Si, estando el mecanismo en reposo y sometido a la acción de la gravedad g, se aplica un par de valor P al piñón en sentido entrante, determinar la aceleración angular de la barra EF en ese instante en función de P, M, R y g.

Nota: para el cálculo de inercias, considerar piñón y rueda como discos de los radios primitivos correspondientes.

Lo primero será resolver la cinemática. Llamaremos α, de sentido entrante, a la aceleración angular del piñón, y obtendremos todas las demás aceleraciones del mecanismo en función de α (ya que se trata de un mecanismo de un grado de libertad). Las velocidades son todas nulas en ese instante, al encontrarse el sistema en reposo.

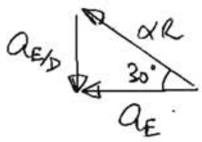
Para piñón y rueda,

$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{1}{2} = \frac{\alpha_B}{\alpha_A} \rightarrow \alpha_B = \frac{\alpha_A}{2}$$

Si llamamos $\boxed{\alpha_A = \alpha}$ $\rightarrow$ $\boxed{\alpha_B = \frac{\alpha}{2} = \alpha_{CD}}$

$$a_E = a_D + a_{E/D}$$

$$? \qquad 30^\circ \quad \frac{\alpha}{2} 2R = \alpha R \qquad ?$$



$$a_{E/D} = \frac{\alpha R}{2} = \alpha_{DE} R \Rightarrow \boxed{\alpha_{DE} = \frac{\alpha}{2}}$$

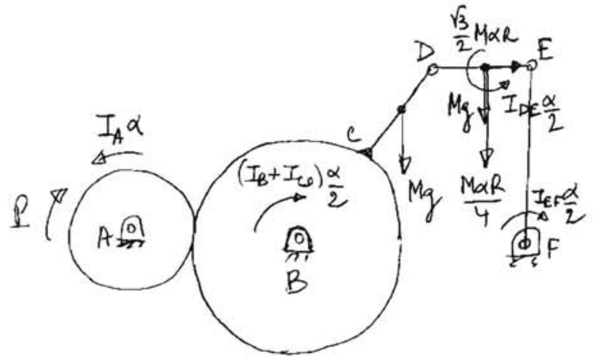
$$a_E = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha R = \alpha_{EF}\sqrt{3}R \Rightarrow \boxed{\alpha_{EF} = \frac{\alpha}{2}}$$

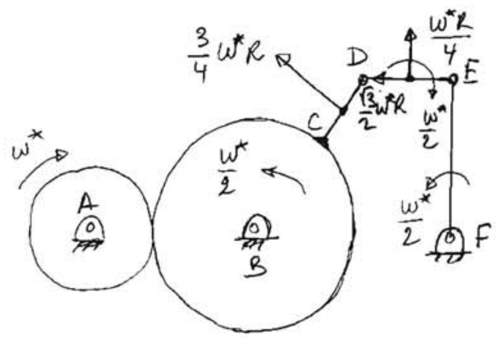
También va a ser necesaria la aceleración del centro de masas de la barra DE,

$$a_G = a_E + a_{G/E}$$

$$\overleftarrow{\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha R} \qquad \uparrow \frac{1}{4}\alpha R$$

A continuación, vamos a dibujar las fuerzas y momentos aplicados y de inercia que actúan sobre el mecanismo en ese instante inicial, y vamos a dibujar el campo de velocidades virtuales que resulta al aplicar una velocidad angular virtual ω^* entrante al piñón (la relación de velocidades va a ser análoga en este caso a la de aceleraciones, al ser las velocidades nulas).





Nota: se han omitido aquellas fuerzas aplicadas o de inercia que no van a dar potencia.

Aplicando ahora el principio de potencias virtuales, se tiene,

$$\dot{W}^* = (P - I_A\alpha)\,w^* - (I_B + I_{CD})\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{w^*}{2} - Mg\,\frac{3}{4}w^*R\cos 60^\circ -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2}M\alpha R\,\frac{\sqrt{3}}{2}w^*R - \left(Mg + \frac{M\alpha R}{4}\right)\frac{w^*R}{4} - I_{DE}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{w^*}{2} - I_{EF}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{w^*}{2} = 0$$

$$I_A = \frac{1}{2}M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}MR^2$$ (al ser el nº de dientes mitad que la rueda)

$$I_B = \frac{1}{2}2MR^2 = MR^2$$

$$I_{CD} = \frac{1}{12}MR^2 + M\left(\frac{3}{2}R\right)^2 = \frac{7}{3}MR^2$$ (por Steiner)

$$I_{DE} = \frac{1}{12}MR^2 \quad ; \quad I_{EF} = \frac{1}{3}M(\sqrt{3}R)^2 = MR^2$$

Entonces,

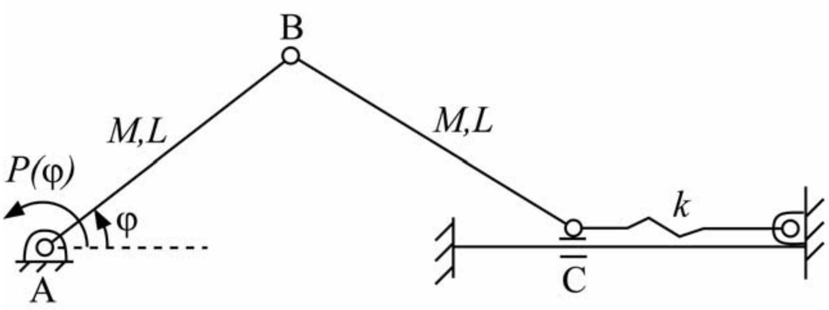
$$P = \frac{1}{8}MR^2\alpha + \frac{1}{4}MR^2\alpha + \frac{7}{12}MR^2\alpha + \frac{3}{8}MgR + \frac{3}{4}MR^2\alpha +$$

$$+ \frac{1}{4}MgR + \frac{1}{16}MR^2\alpha + \frac{1}{48}MR^2\alpha + \frac{1}{4}MR^2\alpha = \frac{49}{24}MR^2\alpha + \frac{5}{8}MgR$$

$$\boxed{\alpha = \frac{24}{49}\cdot\frac{P - \frac{5}{8}MgR}{MR^2}}$$

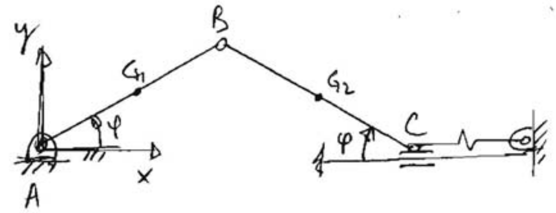
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 10
Nombre ....

El mecanismo biela-manivela de la figura consta de dos barras de masa M y longitud L. Sobre la manivela actúa un par $P(\varphi) = P\sin\varphi$, proporcionado por un motor rotativo montado en la articulación A. Un resorte horizontal de rigidez k se une por un lado al carro, y por el otro al elemento fijo. El conjunto se halla sometido a la acción de la gravedad.



Sabiendo que, inicialmente, el sistema se encuentra en reposo con $\varphi = 0$, y el resorte está sin tensión, obtener, para un instante cualquiera:
a) Energía cinética del sistema.
b) Energía potencial gravitatoria del sistema.
c) Energía potencial elástica del sistema.
d) Ecuación del movimiento del sistema mediante aplicación de la ecuación del trabajo y la energía (ecuación diferencial de primer orden).

A partir de las expresiones anteriores, determinar la velocidad angular de la manivela cuando $\varphi = -45º$. ¿Qué condición tiene que cumplirse para el mecanismo alcance dicha posición?



a) $$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{cases} x_{G_2} = \frac{3}{2}L\cos\varphi \\ y_{G_2} = \frac{L}{2}\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_2} = -\frac{3}{2}L\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi \\ \dot{y}_{G_2} = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

$$v_{G_2}^2 = \dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2 = \frac{9}{4}L^2\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\varphi + \frac{1}{4}L^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi = \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\left(9\,\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\left(1 + 8\,\text{sen}^2\varphi\right)$$

$$T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\left(1 + 8\,\text{sen}^2\varphi\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{8}\right)ML^2\dot{\varphi}^2 + ML^2\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\varphi = \boxed{\left(\frac{1}{3} + \text{sen}^2\varphi\right)ML^2\dot{\varphi}^2 = T}$$

b) $$V_g = Mg\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\varphi + Mg\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\varphi = \boxed{MgL\,\text{sen}\,\varphi = V_g}$$

c) $$V_e = \frac{1}{2}k\left(2L - 2L\cos\varphi\right)^2 = \boxed{2kL^2\left(1 - \cos\varphi\right)^2 = V_e}$$

d) $$\Delta(T+V) = W$$

Inicialmente, $T=0$, $V=0$.

En el trabajo consideramos el realizado por el par que actúa sobre la manivela:

$$W = \int_0^{\varphi} P(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\varphi} P\,\text{sen}\,\varphi\,d\varphi = \left[-P\cos\varphi\right]_0^{\varphi} = P\left(1 - \cos\varphi\right)$$

Entonces, la ecuación del movimiento será:

$$\boxed{\left(\frac{1}{3}+\operatorname{sen}^2\varphi\right)ML^2\dot{\varphi}^2+MgL\operatorname{sen}\varphi+2kL^2(1-\cos\varphi)^2=P(1-\cos\varphi)}$$

Para $\varphi=-45^\circ$,

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)ML^2\dot{\varphi}^2-MgL\frac{\sqrt{2}}{2}+2kL^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=P\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

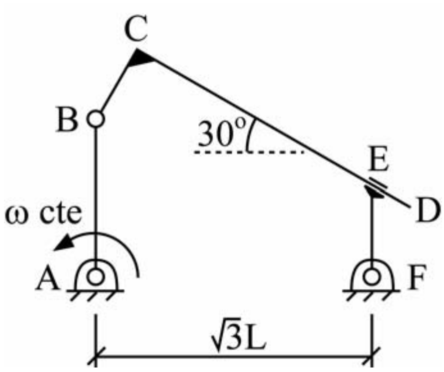
$$\dot{\varphi}=\boxed{\sqrt{\frac{3}{5ML^2}\left[(2-\sqrt{2})P+\sqrt{2}MgL-2(4-2\sqrt{2})^2kL^2\right]}=\omega_{mínima}}$$

Para que el mecanismo pueda alcanzar dicha posición, el contenido de la raíz cuadrada ha de ser positivo:

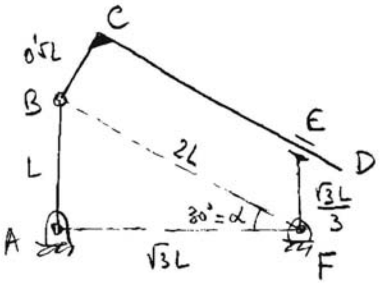
$$\boxed{(2-\sqrt{2})P+\sqrt{2}MgL\geqslant 2(4-2\sqrt{2})^2kL^2}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 10
Nombre ....

El mecanismo de la figura, sometido a la acción de la gravedad, consta de tres elementos: la barra AB, de masa M y longitud L; la barra BCD, de masa despreciable, formada por dos tramos en ángulo recto con longitudes $BC = L/2$ y $CD = 2L$; la barra EF, de masa M y longitud $\sqrt{3}L/3$. La barra AB gira con velocidad constante ω.



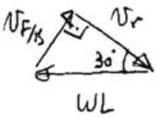
En la posición representada en la figura, determinar:
a) Velocidad angular de la barra EF.
b) Aceleracion angular de la barra EF.
c) Par que tendría que aplicar un motor rotativo situado en la articulación A para lograr el movimiento indicado.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{L}{\sqrt{3}L} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

a) $v_F = v_a + v_r$ (con BCE)

$v_F = 0$; v_r: 30° ?; $v_a = v_B + v_{F/B}$, v_B: ωL, $v_{F/B}$: ? 60°



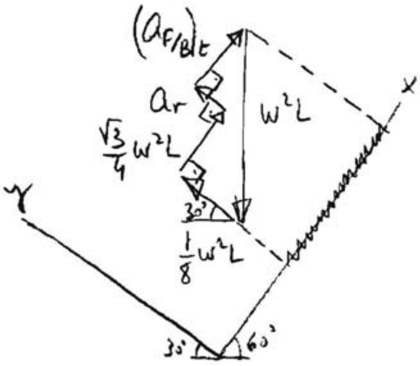
$v_r = \omega L \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L$

$$v_{F/B} = \omega L \operatorname{sen} 30 = \frac{1}{2}\omega L = \omega_{BCD}\, 2L \longrightarrow \boxed{\omega_{BCD} = \frac{\omega}{4} \text{ (tal)} = \omega_{EF}}$$

b) $a_F = a_a + a_r + a_{cor}$ (con BCE)

$a_F = 0$; a_r: 30° ?; $a_{cor} = 2\omega_{BCE} v_r = 2\frac{\omega}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\omega L = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L$ 60°

$a_a = a_B + a_{F/B}$; a_B: $\omega^2 L$; $(a_{F/B})_n$: 30°, $\omega_{BCE}^2\, 2L = \frac{1}{8}\omega^2 L$; $(a_{F/B})_t$: 60°, ?



Proy. en x

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L + (a_{F/B})_t = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 L$$

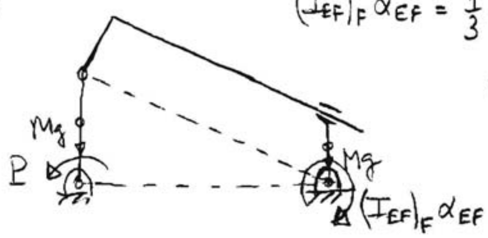
$$(a_{F/B})_t = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L = \alpha_{BCD}\, 2L$$

$$\boxed{\alpha_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2 \text{ (tal)} = \alpha_{EF}}$$

c)

$$(I_{EF})_F\,\alpha_{EF} = \frac{1}{3}M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}L\right)^2\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{72}ML^2\omega^2$$

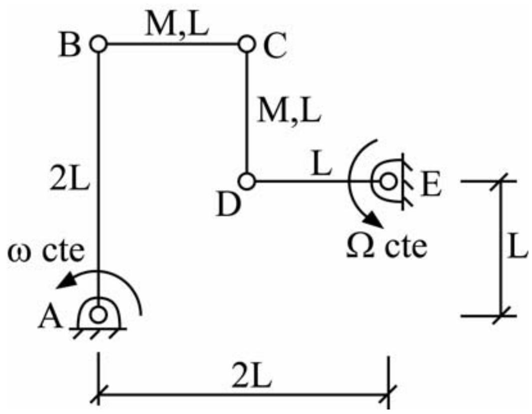
$$\dot{W}^* = P\omega^* - \frac{\sqrt{3}}{72}ML^2\omega^2\frac{\omega^*}{4} = 0$$



$$\boxed{P = \frac{\sqrt{3}}{288}ML^2\omega^2}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 11
Nombre ....

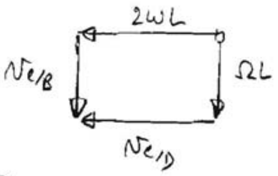
El mecanismo de la figura, sometido a la acción de la gravedad, consta de cuatro elementos: la barra AB, de masa despreciable y longitud $2L$; la barra BC, de masa M uniformemente distribuida y longitud L; la barra CD, de masa M uniformemente distribuida y longitud L; la barra DE, de masa despreciable y longitud L. La barra AB gira con velocidad angular constante ω, y la barra DE gira con velocidad angular constante Ω.



En la posición representada en la figura, determinar:
a) Velocidades angulares de las barras BC y CD.
b) Aceleraciones angulares de las barras BC y CD.
c) Aceleraciones de los centros de masas de las barras BC y CD.
d) Resultante y momento resultante en el centro de masas de las fuerzas de inercia en las barras BC y CD.
e) Pares que tendrían que aplicar sendos motores rotativos situados en las articulaciones A y E para lograr el movimiento indicado.

a) $v_C = v_B + v_{C/B} = v_D + v_{C/D}$

$\overleftarrow{2\omega L}$ $\quad | ?$ $\quad \downarrow \Omega L$ $\quad \overline{?}$

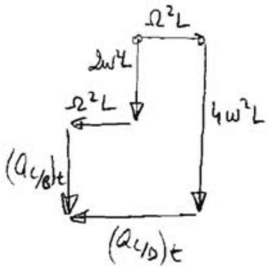


$v_{C/B} = \Omega L = \omega_{BC} L \longrightarrow \boxed{\omega_{BC} = \Omega \text{ entr}}$

$v_{C/D} = 2\omega L = \omega_{CD} L \longrightarrow \boxed{\omega_{CD} = 2\omega \text{ sal}}$

b) $a_C = a_B + a_{C/B} = a_D + a_{C/D}$

a_B: $\downarrow 2\omega^2 L$; $a_{C/B}$: n: $\leftarrow \omega_{BC}^2 L = \Omega^2 L$, t: $| ?$; a_D: $\overrightarrow{\Omega^2 L}$; $a_{C/D}$: n: $\downarrow \omega_{CD}^2 L = 4\omega^2 L$, t: $\overline{?}$



$(a_{C/B})_t = 2\omega^2 L = \alpha_{BC} L \longrightarrow \boxed{\alpha_{BC} = 2\omega^2 \text{ entr}}$

$(a_{C/D})_t = 2\Omega^2 L = \alpha_{CD} L \longrightarrow \boxed{\alpha_{CD} = 2\Omega^2 \text{ sal}}$

c) $a_{G_{BC}} = a_B + a_{G_{BC}/B}$

a_B: $\downarrow 2\omega^2 L$; n: $\leftarrow \omega_{BC}^2 \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\Omega^2 L$; t: $\downarrow \alpha_{BC}\frac{L}{2} = \omega^2 L$

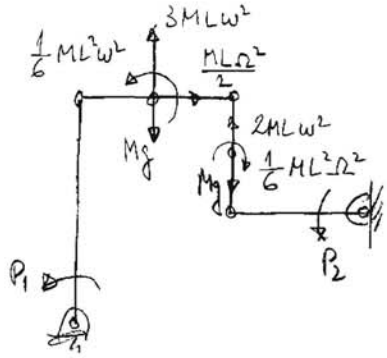
$\Longrightarrow \boxed{a_{G_{BC}} = \leftarrow \tfrac{1}{2}\Omega^2 L \ \ \downarrow 3\omega^2 L}$

$a_{G_{CD}} = a_D + a_{G_{CD}/D}$

a_D: $\overrightarrow{\Omega^2 L}$; n: $\downarrow \omega_{CD}^2 \frac{L}{2} = 2\omega^2 L$; t: $\leftarrow \alpha_{CD}\frac{L}{2} = \Omega^2 L$

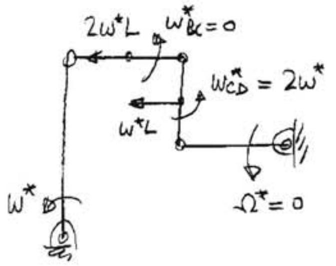
$\Longrightarrow \boxed{a_{G_{CD}} = \downarrow 2\omega^2 L}$

d)



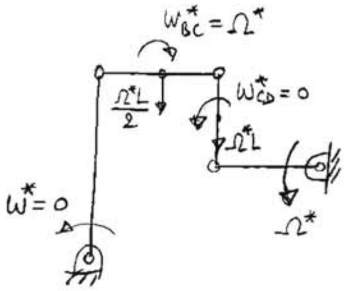
En la figura se muestran las fuerzas de inercia (resultante y momento resultante en el centro de masas para cada barra), así como las fuerzas y momentos aplicados.

e)



$$\dot{W}^* = P_1 \omega^* - \frac{ML\Omega^2}{2} 2\omega^* L - \frac{1}{6} ML^2\Omega^2 2\omega^* = 0$$

$$\boxed{P_1 = \frac{4}{3} ML^2\Omega^2}$$

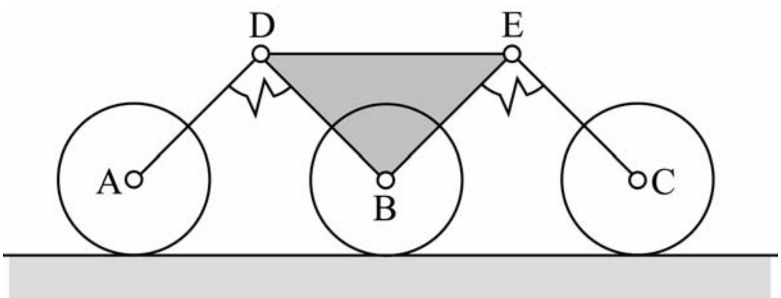


$$\dot{W}^* = P_2 \Omega^* - \left(2ML\omega^2 - Mg\right)\Omega^* L - \left(3ML\omega^2 - Mg\right)\frac{1}{2}\Omega^* L - \frac{1}{6} ML^2\omega^2\Omega^* = 0$$

$$\boxed{P_2 = \frac{11}{3} ML^2\omega^2 - \frac{3}{2} MgL}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 11
Nombre ....

La figura representa un vehículo de propósito especial. El chasis es el triángulo rectángulo BDE de masa *M* y catetos de longitud *L*. Las barras biarticuladas AD y EC tienen longitud *L* y masa despreciable. Las ruedas A, B y C son círculos de masa *m* y radio *r*. En las articulaciones D y E van montados sendos resortes de torsión, de rigidez *k*, que carecen de tensión en la posición representada, en la que el segmento DE se encuentra horizontal. Un motor rotativo situado en la articulación B puede proporcionar un par *P* de aceleración o frenado al vehículo. El sistema se halla sometido a la acción de la gravedad. Se asume que el suelo es siempre plano y horizontal, y que las tres ruedas están en contacto permanente con el suelo, y en condiciones de rodadura.

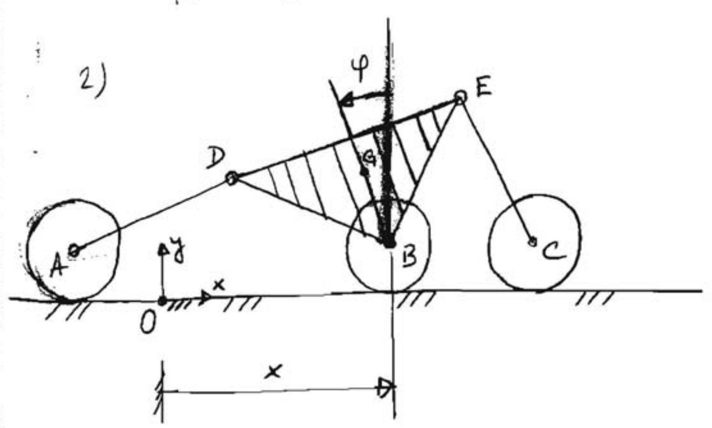


De cara a obtener las ecuaciones del movimiento del sistema por aplicación de las ecuaciones de Lagrange en coordenadas independientes, se requieren las siguientes tareas (no hay que llegar a escribir las ecuaciones de Lagrange, sólo realizar las tareas indicadas):

1) Determinar el número de grados de libertad del sistema.
2) Dibujar el sistema en una posición genérica, e indicar sobre el dibujo los parámetros elegidos para medir el movimiento de los grados de libertad.
3) Obtener, en función de dichos parámetros y sus derivadas:
   a) La energía cinética del chasis.
   b) La energía cinética de cada una de las ruedas.
   c) La energía potencial gravitatoria del sistema.
   d) La energía potencial elástica del sistema.
   e) La fuerzas generalizadas a que da lugar el par *P* del motor rotativo.

1). $\left.\begin{matrix} n = 7 \\ p_I = 8 \end{matrix}\right\} g = 3\times(7-1) - 2\times 8 = 18-16 = \boxed{2 = g}$

2)



$BG = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{\sqrt{2}}{3}L$

3a) $T_{chasis} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

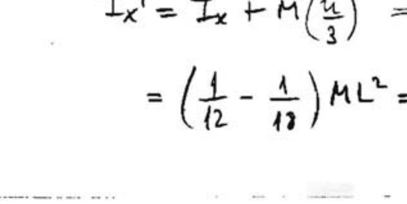
En el sistema de referencia fijo (x,y), las coordenadas del centro de masas del triángulo son:

$$\begin{cases} x_G = x - BG \operatorname{sen}\varphi = x - \frac{\sqrt{2}}{3}L\operatorname{sen}\varphi \\ y_G = r + BG\cos\varphi = r + \frac{\sqrt{2}}{3}L\cos\varphi \end{cases}$$

Derivando,

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} - \frac{\sqrt{2}}{3}L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_G = -\frac{\sqrt{2}}{3}L\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \Rightarrow v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2$$

Nota: si esto no se sabe, puede obtenerse fácilmente por integración.



El momento de inercia de un triángulo de base b y altura h respecto al eje que pasa por la base es:

$$I_{x'} = \frac{1}{6}Mh^2 = \frac{1}{6}M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

Por el teorema de Steiner,

$$I_{x'} = I_x + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 \Rightarrow I_x = I_{x'} - \frac{1}{9}Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{9}M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right)ML^2 = \frac{1}{36}ML^2 = I_x$$

$$I_y = 2\times\left[\frac{1}{6}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2\right] = \frac{1}{12}ML^2$$

$$I_G = I_x + I_y = \left(\frac{1}{36}+\frac{1}{12}\right)ML^2 = \frac{1}{9}ML^2 = I_G$$

Por tanto, la energía cinética del chasis será:

$$T_{chasis} = \frac{1}{2}M\left[\left(\dot{x}-\frac{\sqrt{2}}{3}L\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}L\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\varphi\right)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}ML^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{T_{chasis} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{5}{18}ML^2\dot{\varphi}^2-\frac{\sqrt{2}}{3}ML\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi}$$

3b) Las coordenadas de los puntos A, B y C en el sistema de referencia fijo (x,y) son:

$$\begin{cases} x_A = x - 2L\cos(45-\varphi) \\ y_A = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_A = \dot{x} - 2L\dot{\varphi}\,\text{sen}(45-\varphi) \\ \dot{y}_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = x \\ y_B = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_B = \dot{x} \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = x + 2L\cos(45+\varphi) \\ y_C = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x} - 2L\dot{\varphi}\,\text{sen}(45+\varphi) \\ \dot{y}_C = 0 \end{cases}$$

Para cada rueda, la velocidad angular será $\omega = \frac{v}{r}$, siendo v la velocidad del centro, dado que hay rodadura.

Entonces, la energía cinética de las ruedas queda:

$$T_A = \frac{1}{2}m\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}-2L\dot{\varphi}\,\text{sen}(45-\varphi)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left[\frac{\dot{x}-2L\dot{\varphi}\,\text{sen}(45-\varphi)}{r}\right]^2 = \boxed{\frac{3}{4}m\left[\dot{x}-2L\dot{\varphi}\,\text{sen}(45-\varphi)\right]^2}$$

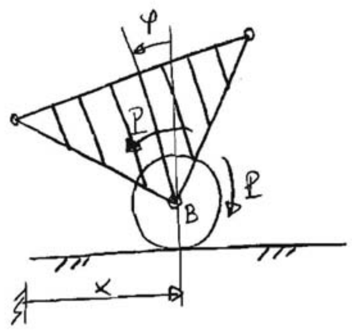
$$\boxed{T_B = \frac{1}{2} m \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2}$$

$$\boxed{T_C = \frac{1}{2} m \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_C^2 = \frac{3}{4} m \left[\dot{x} - 2L\dot{\varphi} \sin(45+\varphi) \right]^2}$$

3c) $V_{grav} = M g y_G = \boxed{Mg\left(r + \frac{\sqrt{2}}{3} L \cos\varphi\right) = V_{grav}}$

3d) $V_{elast} = 2 \times \left[\frac{1}{2} k (2\varphi)^2 \right] = \boxed{4k\varphi^2 = V_{elast}}$

3e) $Q_x = \dot{W}^*_{\substack{\dot{x}=1 \\ \dot{\varphi}=0}} = -P\omega_B^* + P\omega^* = -P\left(-\frac{1}{r}\right) = \boxed{\frac{P}{r} = Q_x}$

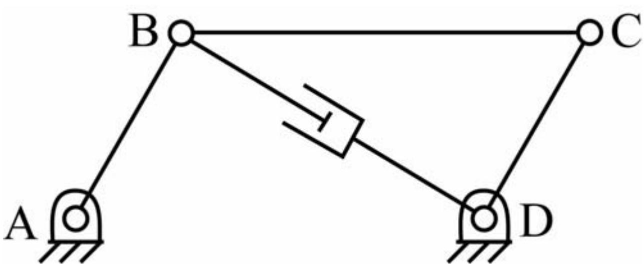


$Q_\varphi = \dot{W}^*_{\substack{\dot{x}=0 \\ \dot{\varphi}=1}} = -P\omega_B^* + P\omega^* =$

$= \boxed{P = Q_\varphi}$

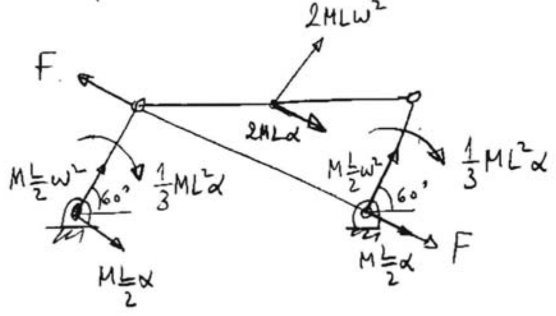
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 12
Nombre ....

El cuadrilátero articulado de la figura está formado por las barras AB y CD, de masa M y longitud L, y la barra BC, de masa $2M$ y longitud $2L$. La distancia entre los puntos fijos A y D es de $2L$. El mecanismo está actuado por un motor lineal conectado a las articulaciones B y D.



Si, en la posición representada en la figura, la barra AB forma 60º con la horizontal, y posee una velocidad angular ω saliente y una aceleración angular α también saliente, determinar la fuerza F que ha de suministrar el motor en ese instante. El mecanismo se mueve en un plano horizontal, por lo que no deberá tenerse en cuenta la acción de la gravedad.

Las fuerzas aplicadas y de inercia sobre el mecanismo son las siguientes:



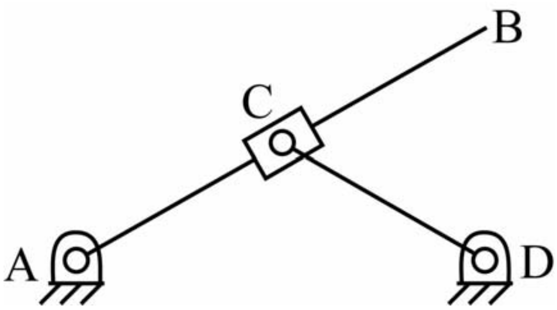
Considerando una ω^* virtual en la barra AB,

$$\dot{W} = F\omega^*L - 2\times\frac{1}{3}ML^2\alpha\,\omega^* - 2ML\alpha\,\omega^*L = 0$$

$$\boxed{F = \frac{8}{3}ML\alpha}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Julio 12
Nombre ....

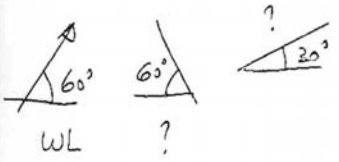
El mecanismo de la figura está formado por las barras AB y CD. La barra AB tiene masa 2*M* y longitud 2*L*, y está articulada al suelo en A. La barra CD tiene masa *M* y longitud *L*, está articulada al suelo en D, y lleva un carro articulado en C, que desliza sobre la barra AB. El mecanismo se mueve merced a un motor rotativo ubicado en la articulación D.

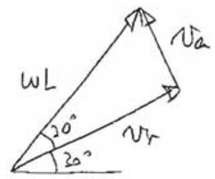


En la posición representada, ambas barras forman 30º con la horizontal. Si se sabe que la barra CD está animada por una velocidad angular ω entrante de valor constante en el tiempo, determinar, para la posición representada:

a) Velocidad angular de la barra AB.
b) Aceleración angular de la barra AB.
c) Par que ha de proporcionar el motor rotativo situado en D.
d) Fuerza de reacción que sufre el carro C por parte de la barra AB.

$v_C = v_a + v_r$ (con AB)

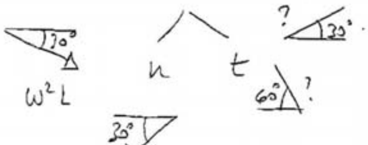




$v_a = \frac{wL}{2} = w_{AB}L \longrightarrow \boxed{w_{AB} = \frac{w}{2} \text{ del}}$

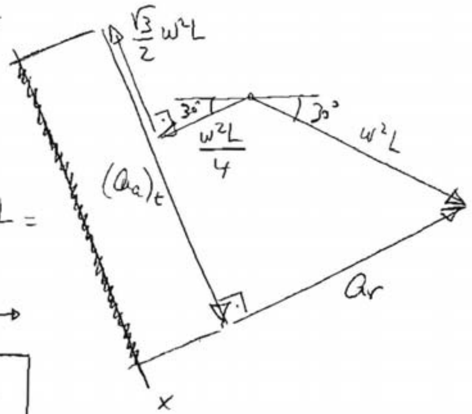
$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2}wL$ 30°

$a_C = a_a + a_r + a_{cor}$ (con AB)



$2w_{AB}v_r = 2\frac{w}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}wL = \frac{\sqrt{3}}{2}w^2L$ 60°

$w_{AB}^2L = \frac{w^2L}{4}$

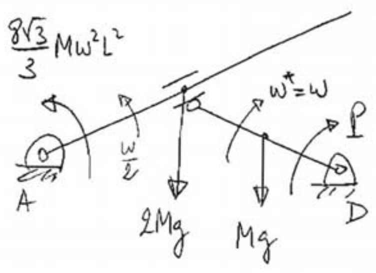


Proy en x

$(a_a)_t = \frac{\sqrt{3}}{2}w^2L + \frac{\sqrt{3}}{2}w^2L =$

$= \sqrt{3}w^2L = \alpha_{AB}L \rightarrow$

$\boxed{\alpha_{AB} = \sqrt{3}\,w^2 \text{ entr}}$



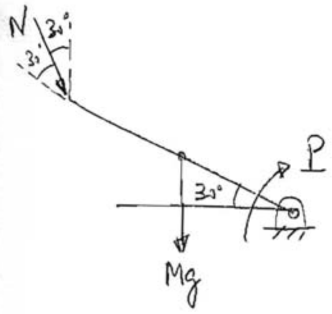
$(I_{AB})_A = \frac{1}{3}(2M)(2L)^2 = \frac{8}{3}ML^2$

$(I_{AB})_A\alpha_{AB} = \frac{8}{3}ML^2\sqrt{3}\,w^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}Mw^2L^2$

$\dot{W} = P\cancel{w} - Mg\cancel{w}\frac{L}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2Mg\frac{\cancel{w}}{2}L\frac{\sqrt{3}}{2} +$

$+ \frac{8\sqrt{3}}{3}Mw^2L^2\frac{\cancel{w}}{2} = 0$

$$\boxed{P = \frac{3\sqrt{3}}{4} MgL - \frac{4\sqrt{3}}{3} M\omega^2 L^2}$$



$$P = Mg\frac{L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + N\frac{1}{2}L \rightarrow$$

$$N = \frac{2P}{L} - \frac{\sqrt{3}}{2}Mg =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}Mg - \frac{8\sqrt{3}}{3}M\omega^2 L - \frac{\sqrt{3}}{2}Mg$$

$$\boxed{N = \sqrt{3}\,Mg - \frac{8\sqrt{3}}{3}M\omega^2 L}$$