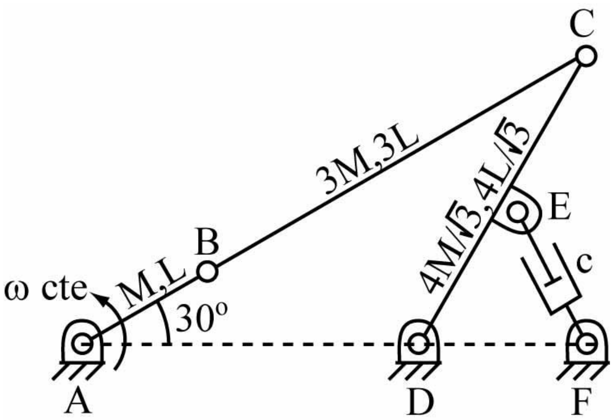
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Diciembre 12
Nombre ....

El mecanismo de la figura es un cuadrilátero articulado manivela-balancín. La distancia entre los puntos fijos A y D es $4L/\sqrt{3}$. En la mitad del balancín CD se halla articulado el amortiguador EF, con constante de amortiguamiento c. En la posición indicada, en la que la manivela AB forma un ángulo de 30º con la horizontal, la manivela AB y el acoplador BC se encuentran alineados, mientras que el triángulo EDF es equilátero.

a) Confirmar, aplicando la desigualdad de Grashof, que el cuadrilátero articulado es manivela-balancín.

b) Si la entrada del mecanismo es la manivela y la salida el balancín, calcular el ángulo de transmisión en la posición indicada en la figura.



Si la manivela gira con velocidad angular constante ω animada por un motor rotativo situado en la articulación A, calcular, para la posición del mecanismo indicada en la figura:

c) Velocidades angulares del acoplador BC y del balancín CD.

d) Aceleraciones angulares del acoplador BC y del balancín CD.

e) Resultante y momento resultante en el punto A de las fuerzas de inercia de la manivela AB.

f) Resultante y momento resultante en el centro de masas de las fuerzas de inercia del acoplador BC.

g) Resultante y momento resultante en el punto D de las fuerzas de inercia del balancín CD.

h) El par motor requerido en la articulación A, en ausencia de gravedad.

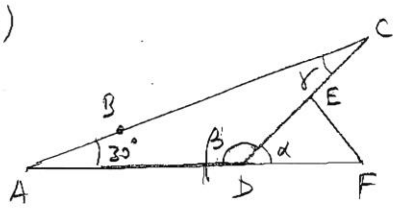
a) Los lados del cuadrilátero son, por orden de tamaño:

$a = L$, $b = \frac{4}{\sqrt{3}}L$, $c = \frac{4}{\sqrt{3}}L$, $d = 3L$

La desigualdad de Grashof es,

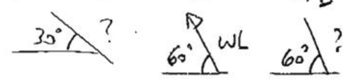
$a + d < b + c \rightarrow L + 3L < 2 \times \frac{4}{\sqrt{3}} L \rightarrow \boxed{4L < \frac{8}{\sqrt{3}} L}$ Ok!

b)



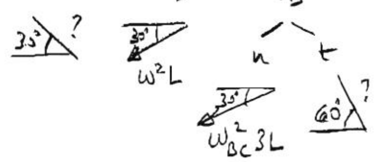
Como EDF es equilátero, $\alpha = 60° \Rightarrow \beta = 120°$ y, el ángulo de transmisión, $\boxed{\gamma = 30°}$

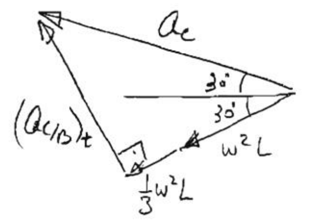
c) $v_C = v_B + v_{C/B} \Rightarrow v_C = 0 = \omega_{CD} \frac{4}{\sqrt{3}} L \Rightarrow \boxed{\omega_{CD} = 0}$



$v_{C/B} = \omega L = \omega_{BC} 3L \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = \frac{\omega}{3} \text{ antr}}$

d) $a_C = a_B + a_{C/B}$



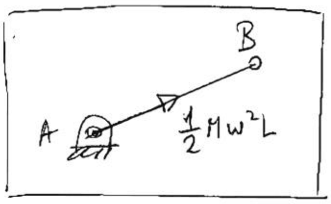


$a_C = \dfrac{\frac{4}{3}\omega^2 L}{\cos 60°} = \frac{8}{3}\omega^2 L = \alpha_{CD} \frac{4}{\sqrt{3}} L \Rightarrow \boxed{\alpha_{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 \text{ hor}}$

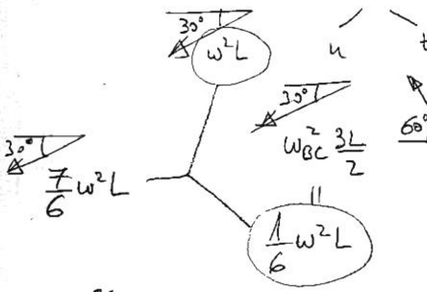
$(a_{C/B})_t = \frac{4}{3}\omega^2 L \, tg\, 60 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\omega^2 L = \alpha_{BC} 3L \Rightarrow \boxed{\alpha_{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\omega^2 \text{ hor}}$

e) $F_{in}^{AB} = -M a_G^{AB} = M \omega^2 \frac{L}{2}$ (30°)

$N_{in_A}^{AB} = 0$

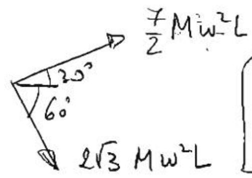


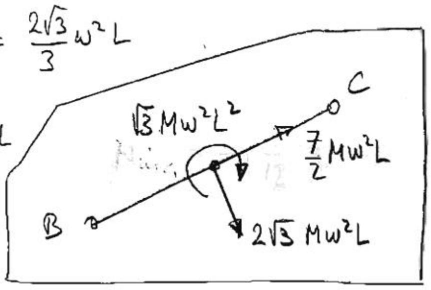
f) $a_G^{BC} = a_B + a_{G/B}$



$\alpha_{BC}\frac{3L}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\omega^2 \frac{3L}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 L$

$F_{in}^{BC} = -(3M)a_G^{BC} =$



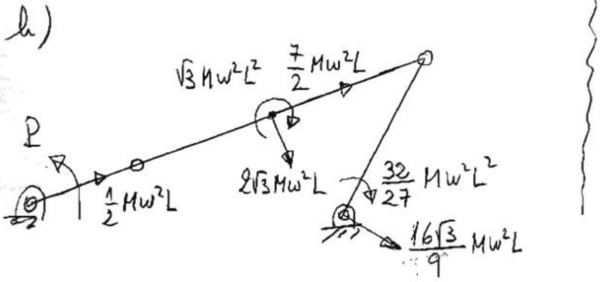


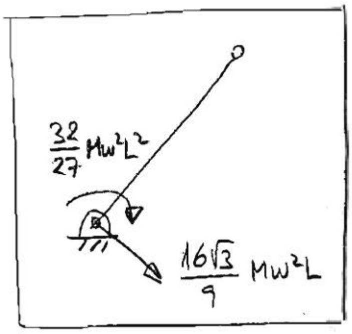
$N_{in_G}^{BC} = -I_G^{BC}\alpha_{BC} = -\left[\frac{1}{12}(3M)(3L)^2\right]\frac{4\sqrt{3}}{9}\omega^2 = \sqrt{3}\,M\omega^2 L^2$ entr

g) $F_{in}^{CD} = -\left(\frac{4}{\sqrt{3}}M\right)a_G^{CD} = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}M\right)\left(\alpha_{CD}\frac{2}{\sqrt{3}}L\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}M\,\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2\frac{2}{\sqrt{3}}L = \frac{16\sqrt{3}}{9}M\omega^2 L$ (30°)

$N_{in_D}^{CD} = -I_D^{CD}\alpha_{CD} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}M\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}L\right)^2\right]\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 = \frac{32}{27}M\omega^2 L^2$ entr

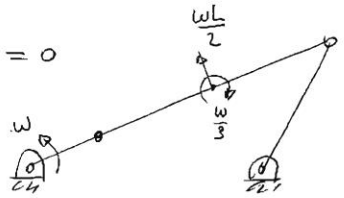
h)





Como el punto E tiene velocidad nula, el amortiguador no introduce fuerza en el sistema. Entonces, aplicando el principio de potencias virtuales,

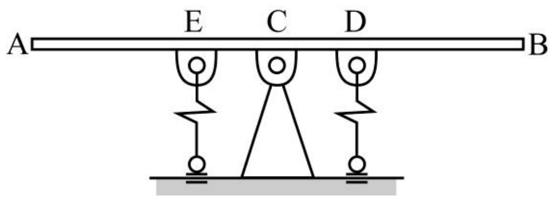
$P\cancel{\omega} - 2\sqrt{3}\,M\omega^2 L\left(\frac{\cancel{\omega} L}{2}\right) + \sqrt{3}\,M\omega^2 L^2\left(\frac{\cancel{\omega}}{3}\right) = 0$



$$\boxed{P = \frac{2\sqrt{3}}{3}M\omega^2 L^2}$$

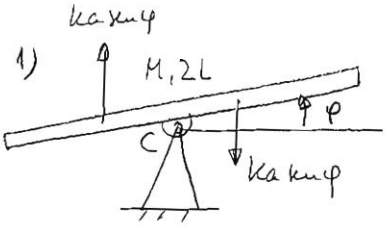
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 13
Nombre ....

El mecanismo de la figura está formado por una barra AB de masa M y longitud 2L, articulada en su centro C al elemento fijo, y dos resortes, ambos de igual rigidez k, que se unen mediante articulaciones a la barra en los puntos D y E respectivamente. Los resortes se unen al elemento fijo mediante articulación con deslizadera, de manera que siempre permanecen verticales durante el movimiento. Se cumple que CD=CE=a. El sistema está sometido a la acción de la gravedad.



1) Definir una coordenada para medir el movimiento del sistema.
2) Obtener la expresión de la energía cinética del sistema para una configuración genérica del mismo, en función de la coordenada definida en el apartado anterior y/o su derivada temporal.
3) Obtener la expresión de la energía potencial (gravitatoria y elástica) del sistema para una configuración genérica del mismo, en función de la coordenada definida en el primer apartado.
4) Si, en el instante inicial, la barra se encuentra inclinada un ángulo de 30º respecto a la horizontal, estando el punto B más alto que el punto A, y en reposo, escribir la ecuación del movimiento del sistema mediante el teorema del trabajo y la energía (integral primera: ecuación diferencial de primer orden).
5) ¿Qué velocidad tendrá el punto B cuando la barra pase por la horizontal?
6) Escribir de nuevo la ecuación del movimiento, pero ahora utilizando las ecuaciones de Newton-Euler o las ecuaciones de Lagrange (ecuación diferencial de segundo orden).
7) Comprobar que la ecuación del movimiento obtenida en el apartado anterior es la misma que se obtiene si se deriva respecto al tiempo la ecuación del movimiento obtenida en el apartado (4).
8) Particularizar la ecuación obtenida en el apartado (6) al caso de vibraciones (pequeños desplazamientos de la barra), y obtener la frecuencia natural de vibración del sistema.

1)



2) $T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M (2L)^2\right)\dot{\varphi}^2 =$

$= \boxed{\frac{1}{6} M L^2 \dot{\varphi}^2 = T}$

3) $\boxed{V_{grav.} = 0}$

$V_{elást} = \frac{1}{2} k (a \operatorname{sen}\varphi)^2 \times 2 = \boxed{k a^2 \operatorname{sen}^2\varphi = V_{elást}}$

4) $\Delta(T+V) = W_{nc} = 0$

$(T+V)_t - (T+V)_0 = 0$

$\boxed{\frac{1}{6} M L^2 \dot{\varphi}^2 + k a^2 \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{1}{4} k a^2}$

5) Cuando $\varphi = 0$, $\frac{1}{6} M L^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} k a^2 \longrightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3ka^2}{2ML^2}}$

$\boxed{v_B = -L\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{3ka^2}{2M}}}$ (el signo negativo indica que la velocidad es hacia abajo)

6) Tomando momentos en C,

$-2(ka \operatorname{sen}\varphi)\, a \cos\varphi = \left[\frac{1}{12} M (2L)^2\right] \ddot{\varphi}$

$\boxed{\frac{1}{3} M L^2 \ddot{\varphi} + k a^2 \operatorname{sen} 2\varphi = 0}$

7) Derivando respecto al tiempo $\frac{1}{6} M L^2 \dot{\varphi}^2 + k a^2 \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{4} k a^2$ se obtiene,

$\dot{\varphi}\left(\frac{1}{3} M L^2 \ddot{\varphi} + k a^2 \operatorname{sen} 2\varphi\right) = 0$

Una ecuación sería $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi = C^{te}$, sólo válida si la barra comienza en reposo en $\varphi = 0$, y la otra ecuación sería la obtenida en el apartado (6).

8) Si φ es pequeño, sen $2\varphi \simeq 2\varphi$, y entonces queda,

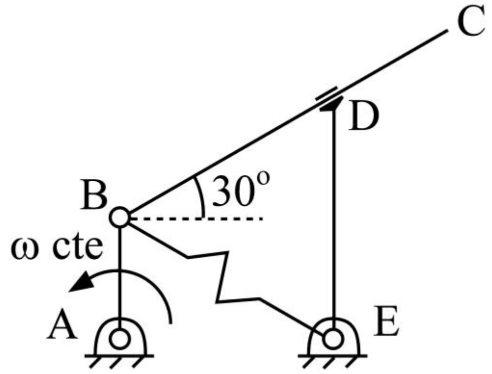
$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi} + 2ka^2\varphi = 0$$

Por lo tanto, $\bar{m} = \frac{1}{3}ML^2$, $\bar{k} = 2ka^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} = \boxed{\sqrt{\frac{6ka^2}{ML^2}} = \omega}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Julio 13
Nombre ....

El mecanismo de la figura se encuentra contenido en un plano horizontal (no está sometido por tanto a la acción de la gravedad) y consta de tres elementos: la barra AB, de masa M y longitud L; la barra BC, de masa despreciable y longitud $3L$; y la barra DE, de masa $2M$ y longitud $2L$. Además, hay un resorte de constante k y longitud natural L que se halla conectado a los puntos B y E. La barra AB gira con velocidad constante ω, merced a la acción de un motor rotativo situado en la articulación A.



En la posición representada en la figura:

a) Obtener la velocidad angular de la barra DE.

b) Obtener la aceleracion angular de la barra DE.

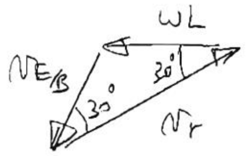
c) Dibujar el diagrama de sólido libre de cada uno de los tres elementos, indicando las fuerzas aplicadas y de enlace que actúan sobre ellos.

d) Escribir las ecuaciones dinámicas de Newton-Euler para cada uno de los tres elementos, a partir de los diagramas de sólido libre realizados en el apartado anterior.

a) $v_E = v_a + v_r$ (con BC)

$v_E = 0$ $\quad$ $v_a = v_B + v_{E/B}$ $\quad$ v_r: ? $30°$

v_B: ωL $\quad$ $v_{E/B}$: ? $60°$



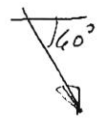
$v_{E/B} = \omega L = \omega_{BC}\, 2L \Rightarrow \omega_{BC} = \boxed{\frac{\omega}{2} \text{ antih} = \omega_{DE}}$

$v_r = 2\omega L \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\omega L$ $\quad 30°$

b) $a_E = a_a + a_r + a_{cor}$ (con BC)

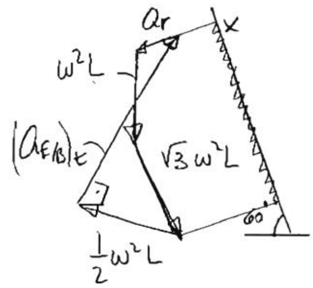
$a_E = 0$ $\quad$ $a_a = a_B + a_{E/B}$ $\quad$ a_r: ? $30°$

$2\omega_{BC} v_r = 2\frac{\omega}{2}\sqrt{3}\,\omega L = \sqrt{3}\,\omega^2 L$



a_B: $\omega^2 L$ $\quad$ $a_{E/B}$: n: $30°$; t: ? $60°$

$\omega_{BC}^2\, 2L = \frac{\omega^2}{4} 2L = \frac{1}{2}\omega^2 L$



<u>Proy en x</u>

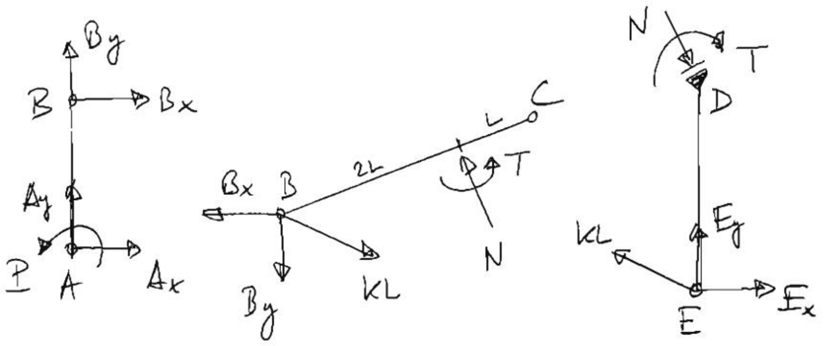
$\sqrt{3}\,\omega^2 L + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 L = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\omega^2 L + \frac{1}{2}(a_{E/B})_t$

$\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\omega^2 L - \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L = \frac{1}{2}(a_{E/B})_t$

$\frac{5}{2}\sqrt{3}\,\omega^2 L = (a_{E/B})_t = \alpha_{BC}\, 2L$

$\alpha_{BC} = \boxed{\frac{5}{4}\sqrt{3}\,\omega^2 \text{ hor} = \alpha_{DE}}$

c)



d)

<u>Barra AB</u>

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y = -M\omega^2 \frac{L}{2}$$

$$P - B_x L = 0$$

<u>Barra BC</u>

$$-B_x - \frac{N}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} kL = 0$$

$$-B_y + \frac{\sqrt{3}}{2} N - \frac{1}{2} kL = 0$$

$$T + 2L N = 0$$

<u>Barra DE</u>

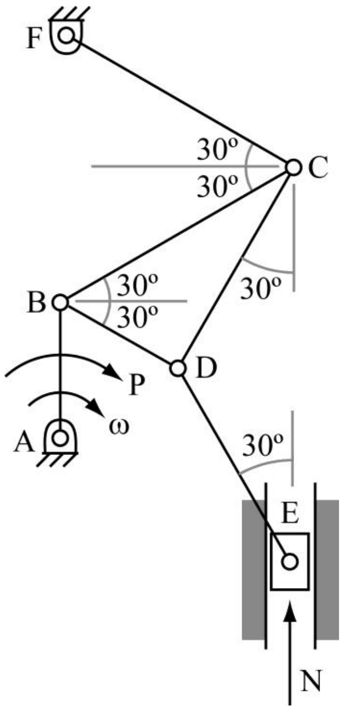
$$E_x - \frac{\sqrt{3}}{2} kL + \frac{N}{2} = -\frac{5}{2}\sqrt{3} M\omega^2 L$$

$$E_y + \frac{1}{2} kL - \frac{\sqrt{3}}{2} N = -\frac{1}{2} M\omega^2 L$$

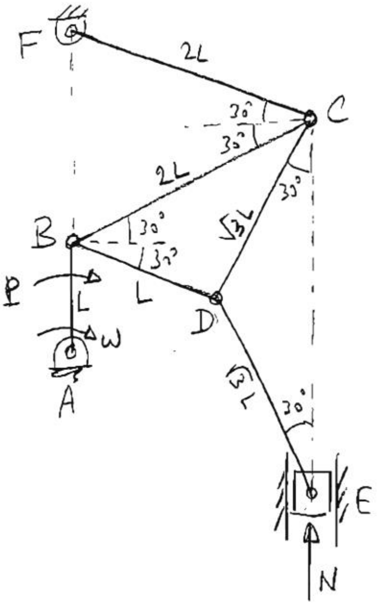
$$-T - NL = \left[\frac{1}{3}(2M)(2L)^2\right] \frac{5}{4}\sqrt{3}\,\omega^2 = \frac{10\sqrt{3}}{3} M\omega^2 L^2$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Diciembre 13
Nombre...

El mecanismo de la figura corresponde a una máquina de inyección de plástico, donde la barra AB es la entrada, y la deslizadera E es el pistón de inyección. La barra AB tiene longitud L, y las barras BC y CF tienen ambas longitud 2L.



a) Si, en la posición del mecanismo representada en la figura, la velocidad angular de la barra de entrada AB es ω entrante, calcular la velocidad del pistón de inyección E.
b) Calcular el valor necesario del par P que ha de aplicar sobre la barra AB el motor rotativo situado en A que mueve el mecanismo, para vencer una fuerza resistente en la inyección de valor N. Para este cálculo, se considerarán despreciables las masas de todos los elementos del mecanismo.



$AB = L \ ; \ BC = CF = 2L$

$BD = 2L\cos 60 = L$

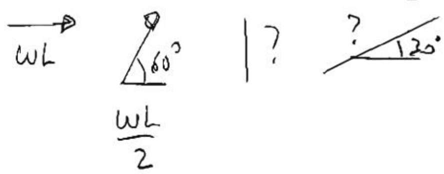
$CD = BC \operatorname{sen} 60 = \sqrt{3}L = DE$

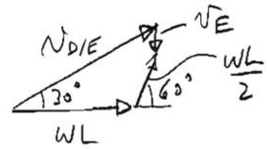
a) $v_C = v_B + v_{C/B}$

$v_{C/B} = \omega L = \omega_{BCD} 2L$

$$\boxed{\omega_{BCD} = \frac{\omega}{2} \ \text{sal}}$$

$v_D = v_B + v_{D/B} = v_E + v_{D/E}$





$v_{D/E}\cos 30 = \omega L + \frac{\omega L}{2}\cos 60 \longrightarrow v_{D/E} = \frac{5}{2\sqrt{3}}\omega L = \omega_{DE}\sqrt{3}L$

$$\boxed{\omega_{DE} = \frac{5}{6}\omega \ \text{ent}}$$

$v_{D/E}\operatorname{sen} 30 = v_E + \frac{\omega L}{2}\operatorname{sen} 60 \longrightarrow \boxed{v_E = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega L}$

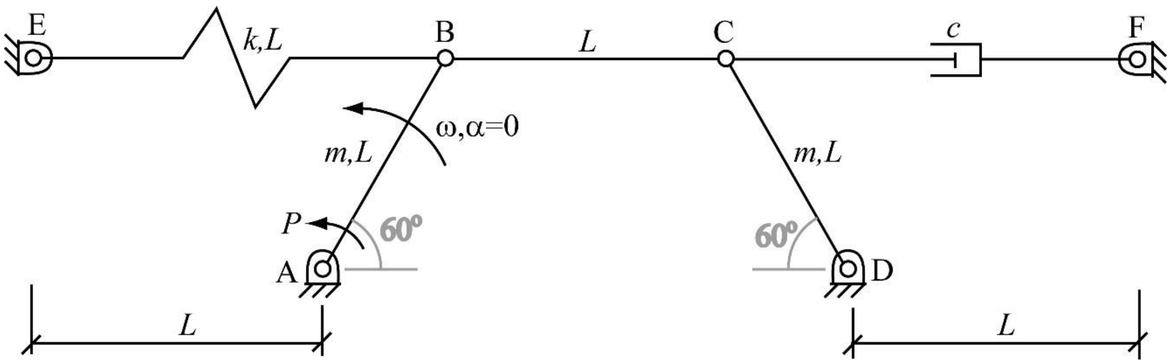
b) $P\omega = N v_E$

$P\omega = N\frac{\sqrt{3}}{6}\omega L$

$$\boxed{P = \frac{\sqrt{3}}{6}NL}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 14
Nombre ....

El sistema mostrado en la figura se halla contenido en un plano vertical y está sometido a la acción de la gravedad. Las barras AB y CD tienen masa m uniformemente distribuida y longitud L. La masa del acoplador (barra BC) es despreciable. El resorte EB tiene rigidez k y longitud natural L. El amortiguador FC tiene constante de amortiguamiento c.



Si, en la posición representada en la figura, la barra AB posee una velocidad angular ω y una aceleración angular nula, determinar:

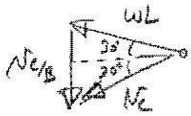
a) Velocidad angular de todas las barras.

b) Aceleración angular de todas las barras.

c) Par P que debe realizar un motor rotativo situado en A para que el movimiento del mecanismo sea el indicado.

a) $v_C = v_B + v_{C/B}$

$30°$ $\;\;$? $\qquad$ $30°$ $\;\;$ ωL $\qquad$ $|\,?$



$v_{C/B} = 2\omega L \operatorname{sen} 30 = \omega L =$

$= \omega_{BC} L \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = \omega \text{ entr}}$

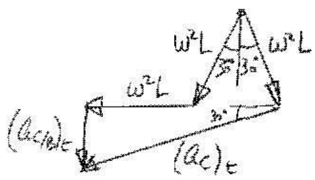
$v_C = \omega L = \omega_{CD} L \Rightarrow \boxed{\omega_{CD} = \omega \text{ sal}}$

b) $a_C = a_B + a_{C/B}$

a_C: n: $60°$, $\omega_{CD}^2 L = \omega^2 L$ $\qquad$ t: $30°$, ?

a_B: $60°$, $\omega^2 L$

$a_{C/B}$: n: $\omega_{BC}^2 L = \omega^2 L$ $\qquad$ t: $|\,?$



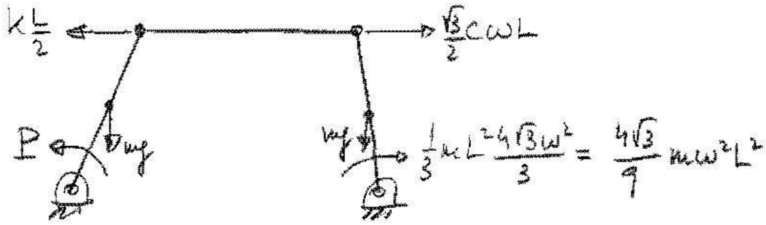
$(a_C)_t \cos 30 = \omega^2 L + 2\omega^2 L \operatorname{sen} 30 = 2\omega^2 L \Rightarrow (a_C)_t = \dfrac{4\omega^2 L}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}\,\omega^2 L}{3} =$

$= \alpha_{CD} L \Rightarrow \boxed{\alpha_{CD} = \dfrac{4\sqrt{3}\,\omega^2}{3} \text{ sal}}$

$(a_{C/B})_t = (a_C)_t \operatorname{sen} 30 = \dfrac{4\sqrt{3}\,\omega^2 L}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\,\omega^2 L}{3} = \alpha_{BC} L \Rightarrow$

$\boxed{\alpha_{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}\,\omega^2}{3} \text{ entr}}$

c)



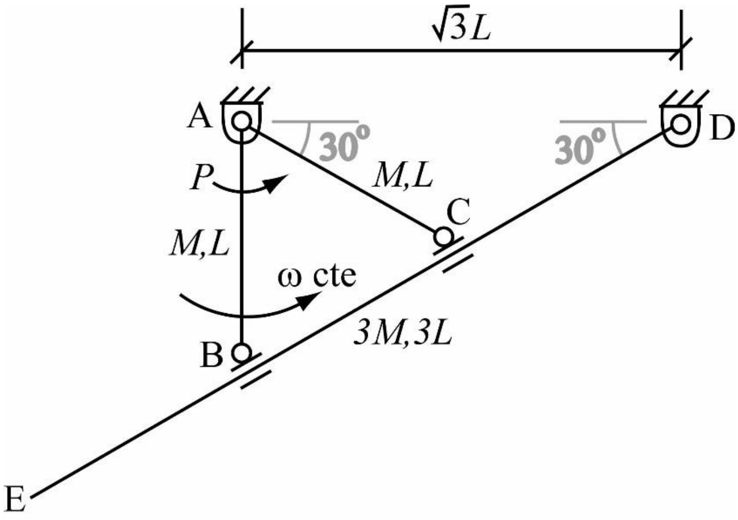
$\dot{W} = P\cancel{\omega} - mg\cancel{\omega}\dfrac{L}{2}\operatorname{sen}30 + k\dfrac{L}{2}\cancel{\omega}L\cos 30 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}c\omega L\cancel{\omega}L\cos 30 +$

$+ mg\cancel{\omega}\dfrac{L}{2}\operatorname{sen}30 - \dfrac{4\sqrt{3}}{9}m\omega^2L^2\cancel{\omega} = 0$

$\boxed{P = \dfrac{3}{4}c\omega L^2 + \dfrac{4\sqrt{3}}{9}m\omega^2L^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}kL^2}$

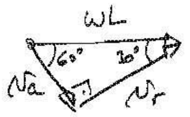
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Julio 14
Nombre ....

El mecanismo de la figura sirve para transformar el giro continuo de la barra AB (manivela) en un giro alternativo de la barra AC (balancín). Las barras AB y AC tienen masa *M* y longitud *L*, mientras que la barra DE posee masa 3*M* y longitud 3*L*. El mecanismo se encuentra en un plano horizontal (no considerar por tanto el efecto de la gravedad).



Si, en el instante representado, la manivela AB se mueve con velocidad angular ω constante, determinar, en ese instante:
a) Velocidad angular de la barra AC.
b) Aceleración angular de la barra AC.
c) Par motor *P* que debe aplicar sobre la barra AB un motor rotativo situado en A para que el movimiento del mecanismo sea el indicado.
d) Fuerza de reacción sobre la barra DE en el par cinemático B.

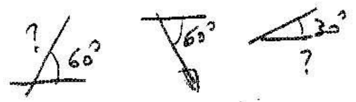
a) $v_B = v_a + v_r$ (con DE)

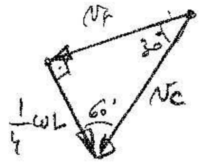


$v_a = \frac{1}{2}\omega L = \omega_{DE}\, 2L \longrightarrow \omega_{DE} = \frac{\omega}{4}$ sch

$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L$

$v_C = v_a + v_r$ (con DE)





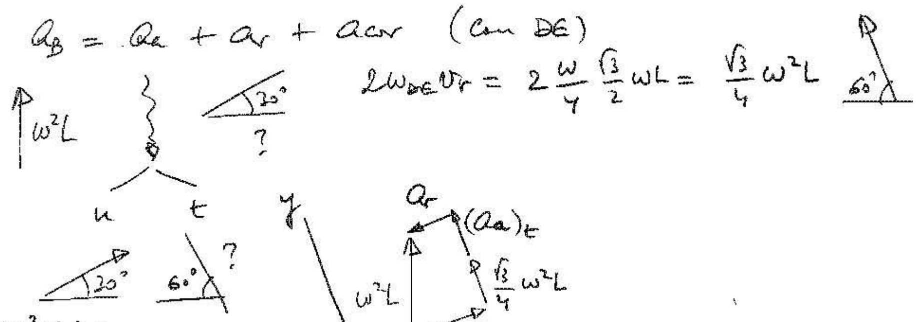
$\omega_{DE} L = \frac{1}{4}\omega L$

$v_r = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega L$

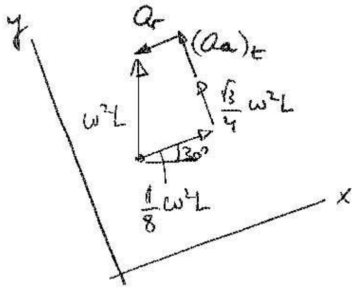
$v_C = \frac{1}{2}\omega L = \omega_{AC} L \longrightarrow \boxed{\omega_{AC} = \frac{\omega}{2} \text{ antr}}$

b) $a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con DE)

$2\omega_{DE} v_r = 2\frac{\omega}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega L = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L$



$\omega_{DE}^2\, 2L = \frac{1}{8}\omega^2 L$



Proy en x

$\frac{1}{8}\omega^2 L = \frac{1}{2}\omega^2 L + a_r \longrightarrow a_r = -\frac{3}{8}\omega^2 L$

Proy en y

$(a_a)_t + \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 L \longrightarrow (a_a)_t = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L = \alpha_{DE}\, 2L \longrightarrow \alpha_{DE} = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$ antr

$a_C = a_a + a_r + a_{cor}$ (con DE)

$2\omega_{DE} v_r = 2\frac{\omega}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\omega L = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2 L$ (60°)

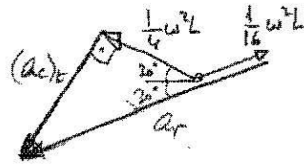
a_C: n (30°), t (? 60°); a_a: n (30°), t (60°)

$\omega_{AC}^2 L = \frac{1}{4}\omega^2 L$ $\qquad$ $\omega_{DE}^2 L = \frac{1}{16}\omega^2 L$

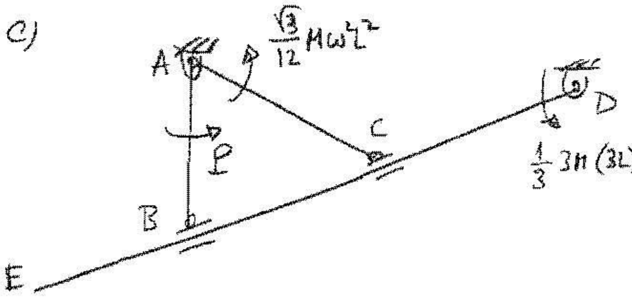
$\alpha_{DE} L = \frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2 L$ $\quad$ Se anulan

$(a_C)_t = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L = \alpha_{AC} L$

$$\boxed{\alpha_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 \text{ antihor.}}$$



c)

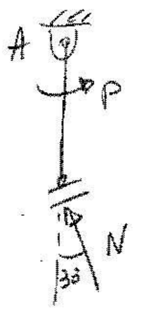


$\frac{1}{3}3M(3L)^2\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2 = \frac{9\sqrt{3}}{8}M\omega^2L^2$

$$\dot{W} = P\cancel{\omega} - \frac{\sqrt{3}}{12}M\omega^2L^2\frac{\cancel{\omega}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8}M\omega^2L^2\frac{\cancel{\omega}}{4} = 0$$

$$P = \left(\frac{1}{24} - \frac{9}{32}\right)\sqrt{3}M\omega^2L^2 = \boxed{-\frac{23}{96}\sqrt{3}M\omega^2L^2 = P}$$

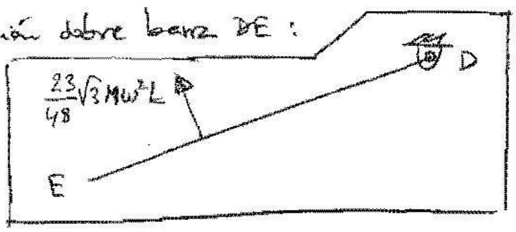
d)



$P - \frac{N}{2}L = 0 \rightarrow N = \frac{2P}{L}$

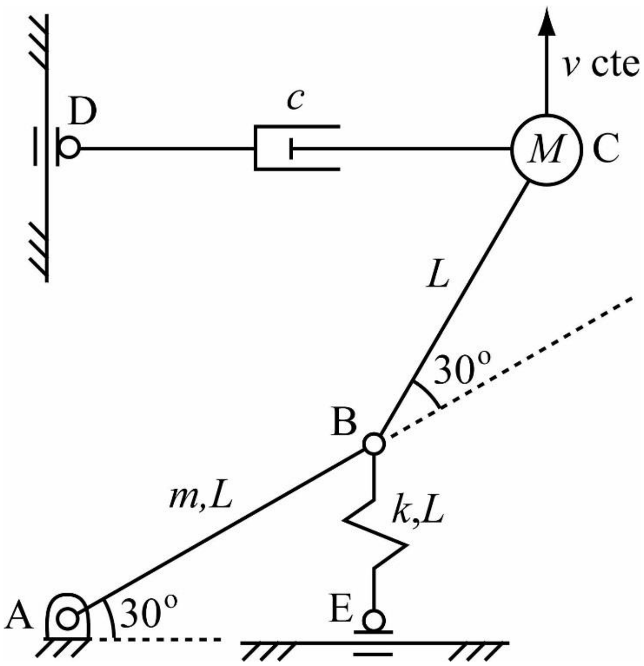
$N = -\frac{23}{48}\sqrt{3}M\omega^2 L$

Reacción sobre barra DE:



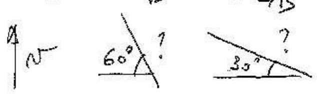
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 15
Nombre ....

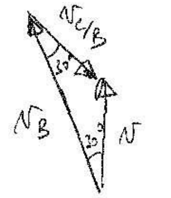
El manipulador de la figura está formado por las barras AB, de masa *m* y longitud *L*, y BC, de longitud *L* y masa despreciable. El manipulador se mueve de tal manera que la mano del mismo (punto C, con masa puntual *M*) posee una velocidad *v* constante, vertical y hacia arriba. Sobre el punto C actúa un amortiguador de constante *c*, que se halla siempre en la misma horizontal que el punto C. Sobre el punto B actúa un resorte de constante *k* y longitud natural *L*, que se halla siempre en la misma vertical que el punto B. El manipulador dispone de sendos motores rotativos situados en las articulaciones A y B. El sistema se halla sometido a la acción de la gravedad.



Determinar, en la posición representada:
a) Las velocidades angulares de las barras AB y BC.
b) Las aceleraciones angulares de las barras AB y BC.
c) El par que debe aplicar el motor rotativo situado en A.

a) $v_C = v_B + v_{C/B}$



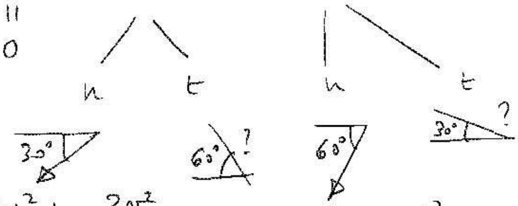


$v_{C/B} = v = \omega_{BC} L \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{v}{L}$ antih

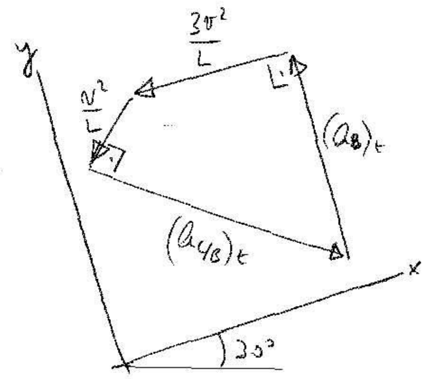
$v_B = 2v\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, v = \omega_{AB} L \Rightarrow \omega_{AB} = \sqrt{3}\,\frac{v}{L}$ hor

b) $a_C = a_B + a_{C/B}$

$a_C = 0$



$\omega_{AB}^2 L = \frac{3v^2}{L}$ $\qquad$ $\omega_{BC}^2 L = \frac{v^2}{L}$



Proy x

$$\frac{1}{2}(a_{C/B})_t = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v^2}{L} + \frac{3v^2}{L}$$

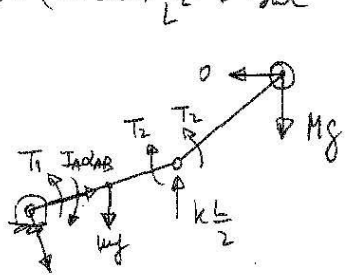
$$(a_{C/B})_t = (6+\sqrt{3})\frac{v^2}{L} = \alpha_{BC} L \Rightarrow \alpha_{BC} = (6+\sqrt{3})\frac{v^2}{L^2}$$ antih

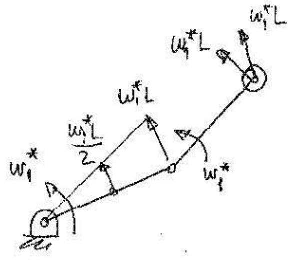
Proy y

$$(a_B)_t = \frac{1}{2}\frac{v^2}{L} + \frac{\sqrt{3}}{2}(6+\sqrt{3})\frac{v^2}{L} = (2+3\sqrt{3})\frac{v^2}{L} = \alpha_{AB} L$$

$$\alpha_{AB} = (2+3\sqrt{3})\frac{v^2}{L^2}$$ hor

c)





$$I_A \alpha_{AB} = \left(\frac{1}{3} mL^2\right)(2+3\sqrt{3})\frac{v^2}{L^2} = \left(\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right) m v^2$$

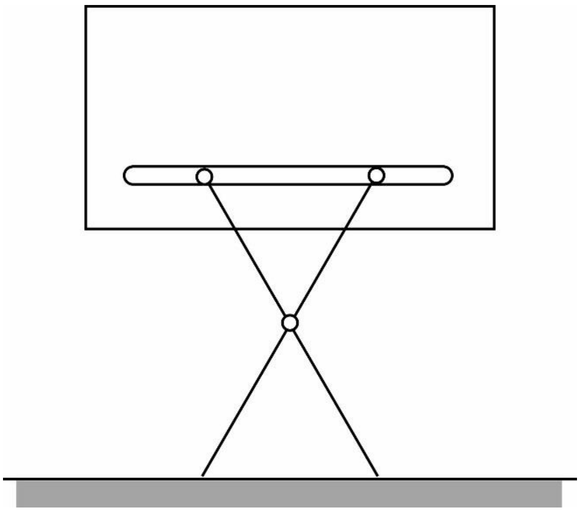
$$\dot{W}^* = T_1 \omega_1^* - \left(\frac{2}{3} + \sqrt{3}\right) m v^2 \omega_1^* - mg\, \omega_1^* \frac{L}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + k \frac{L}{2} \omega_1^* L \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- Mg\, \omega_1^* L \frac{\sqrt{3}}{2} - Mg\, \omega_1^* L \frac{1}{2} = 0$$

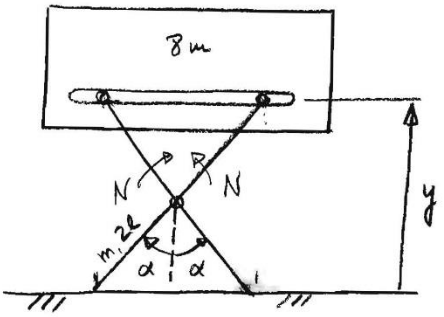
$$\boxed{T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} mgL + \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) MgL - \frac{\sqrt{3}}{4} kL^2 + \left(\frac{2}{3} + \sqrt{3}\right) m v^2}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 15
Nombre ....

El bloque de la figura, de masa $8m$, se apoya en dos patas iguales, cada una ellas de masa m y longitud $2l$, articuladas entre sí en su punto medio. En dicha articulación existe rozamiento seco, que se manifiesta en un par de rozamiento constante de valor $\frac{8\sqrt{3}mgl}{\pi}$ que se opone al giro relativo entre las patas. Cada pata se une al bloque por una conexión que permite deslizamiento y giro, y se apoya simplemente en el suelo.



Si inicialmente el sistema está en reposo y el ángulo entre las patas es de 60º, calcular la velocidad que habrá alcanzado el bloque bajo la acción de la gravedad cuando las patas formen entre sí un ángulo de 180º.



$$y = 2l\cos\alpha$$

$$\dot{y} = -2l\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}(8m)\dot{y}^2 +$$

$$+\, 2\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(2l)^2\right)\dot{\alpha}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}8m\left(2l\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)^2 + \frac{1}{4}m\left(2l\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)^2 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 =$$

$$= 17ml^2\dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + \frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha}^2 = \left(17\,\mathrm{sen}^2\alpha + \frac{1}{3}\right)ml^2\dot{\alpha}^2 = T$$

$$V = (8m)gy + 2\left(mg\frac{y}{2}\right) = 9mgy = 9mg\,2l\cos\alpha =$$

$$= 18mgl\cos\alpha = V$$

$$W_{nc} = -2\int_{\pi/6}^{\alpha} N\,d\alpha = -2N\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -2\cdot\frac{8\sqrt{3}}{\pi}mgl\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{16\sqrt{3}}{\pi}mgl\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Delta(T+V) = W_{nc}$$

$$\left(17\,\mathrm{sen}^2\alpha + \frac{1}{3}\right)ml^2\dot{\alpha}^2 + 18mgl\cos\alpha - 9\sqrt{3}mgl =$$

$$= -\frac{16\sqrt{3}}{\pi}mgl\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$$

Cuando $\alpha = 90°$,

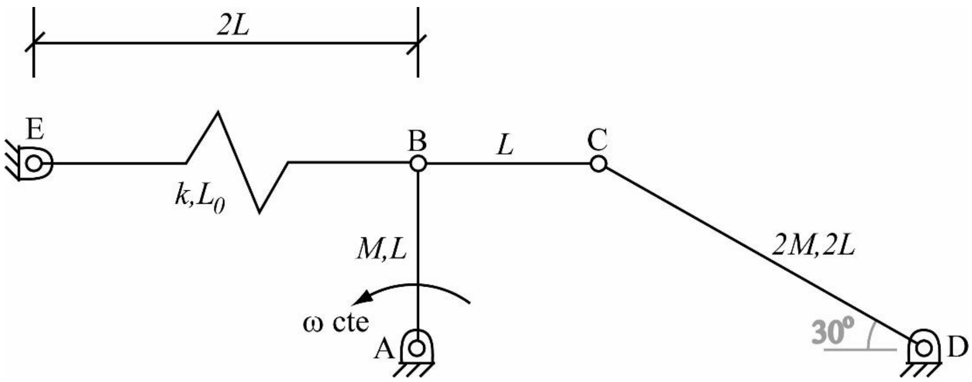
$$\left(17 + \frac{1}{3}\right)ml^2\dot{\alpha}^2 = 9\sqrt{3}mgl - \frac{16\sqrt{3}}{3}mgl$$

$$\frac{52}{3}l\dot{\alpha}^2 = \frac{11\sqrt{3}}{3}g \rightarrow \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{11\sqrt{3}\,g}{52\,l}}$$

$$v = 2l\dot{\alpha} = \boxed{\sqrt{\frac{11\sqrt{3}}{13}gl} = v}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Julio 15
Nombre ....

El mecanismo de la figura está formado por tres barras: la barra AB, con masa M y longitud L; la barra CD, con masa $2M$ y longitud $2L$; y la barra BC, con masa despreciable y longitud L. El mecanismo se encuentra en un plano horizontal (no considerar por tanto el efecto de la gravedad).



Si, en el instante representado, la barra AB se mueve con velocidad angular ω constante, determinar, en ese instante:

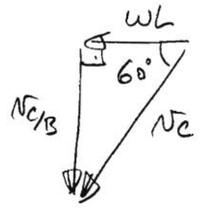
a) Velocidades angulares de las barras BC y CD.

b) Aceleraciones angulares de las barras BC y CD.

c) Longitud natural L_0 que ha de poseer el resorte BE de rigidez k para que el movimiento del mecanismo sea el indicado.

a) $v_C = v_B + v_{C/B}$

$? \angle 60^\circ \qquad \overleftarrow{\omega L} \qquad | \, ?$



$v_{C/B} = \omega L \operatorname{tg} 60^\circ =$

$= \sqrt{3}\,\omega L = \omega_{BC} L$

$$\boxed{\omega_{BC} = \sqrt{3}\,\omega \text{ entr}}$$

$$v_C = \frac{\omega L}{\cos 60^\circ} = 2\omega L = \omega_{CD} 2L$$

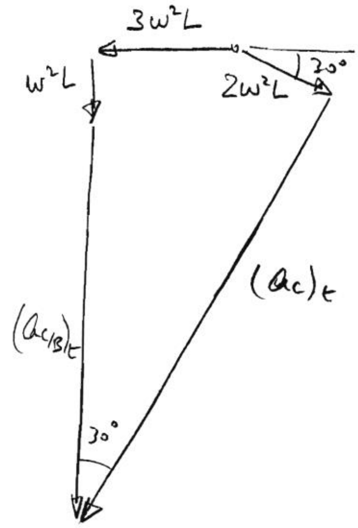
$$\boxed{\omega_{CD} = \omega \text{ sal}}$$

b) $a_C = a_B + a_{C/B}$

a_C: n: 30°, $\omega_{CD}^2 2L = 2\omega^2 L$; t: $? \angle 60^\circ$

a_B: $\downarrow \omega^2 L$

$a_{C/B}$: n: $\leftarrow \omega_{BC}^2 L = 3\omega^2 L$; t: $| \, ?$



$$(a_C)_t \operatorname{sen} 30^\circ = 3\omega^2 L + 2\omega^2 L \cos 30^\circ$$

$$(a_C)_t = 2(3+\sqrt{3})\,\omega^2 L = \alpha_{CD} 2L$$

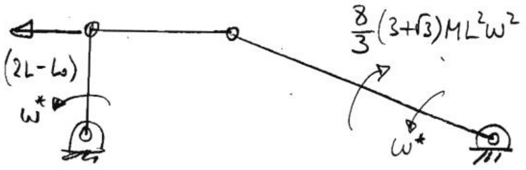
$$\boxed{\alpha_{CD} = (3+\sqrt{3})\,\omega^2 \text{ sal}}$$

$$\omega^2 L + (a_{C/B})_t = 2\omega^2 L \operatorname{sen} 30^\circ + (a_C)_t \cos 30^\circ$$

$$(a_{C/B})_t = 3(\sqrt{3}+1)\,\omega^2 L = \alpha_{BC} L$$

$$\boxed{\alpha_{BC} = 3(\sqrt{3}+1)\,\omega^2 \text{ entr}}$$

c)



$$\dot{W}^* = k(2L - L_0)\,\omega^* L - \frac{8}{3}(3+\sqrt{3})\,M L^2 \omega^2 \omega^* = 0$$

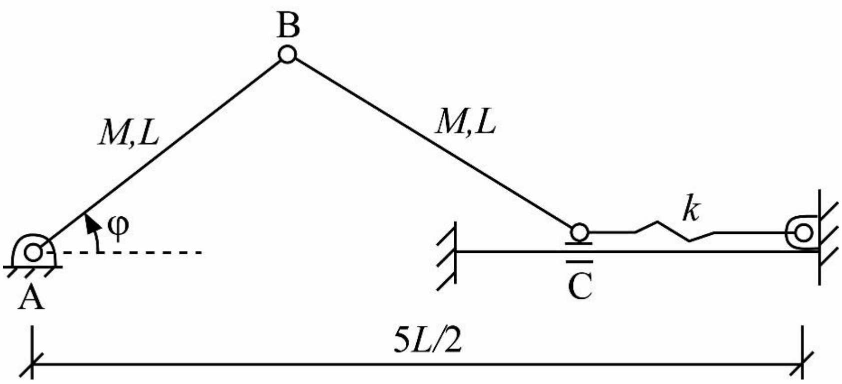
$$\boxed{L_0 = 2L\left[1 - \frac{4}{3k}(3+\sqrt{3})\,M\omega^2\right]}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 16

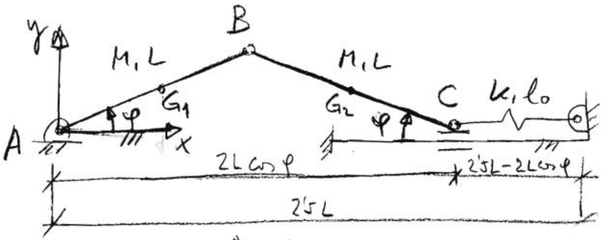
Nombre ....

En el mecanismo biela-manivela de la figura, sometido a la gravedad:

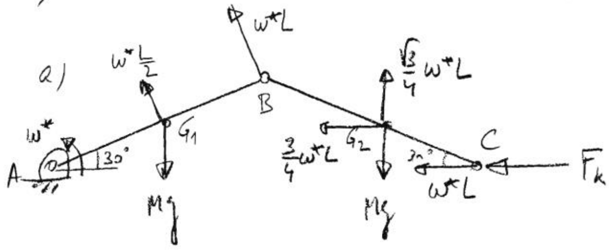
a) Determinar el valor de la longitud natural del resorte para que la posición del mecanismo correspondiente a $\varphi = 30^{\mathrm{o}}$ sea de equilibrio.



b) Si se proporcionan al mecanismo del apartado anterior unas condiciones iniciales $\varphi = 0^{\mathrm{o}}$, $\dot{\varphi} = 0$, obtener la velocidad angular de la barra AB cuando el mecanismo pase por φ=30º, asumiendo que el punto B se va a ir hacia arriba, no hacia abajo. Utilizar en el desarrollo del apartado los parámetros del problema, M, L, k, g, pero, al final, darles los siguientes valores para calcular un valor númerico de la velocidad angular de la barra AB: $M = 1\,\mathrm{kg}$, $L = 1\,\mathrm{m}$, $k = 100\ \mathrm{N/m}$, $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

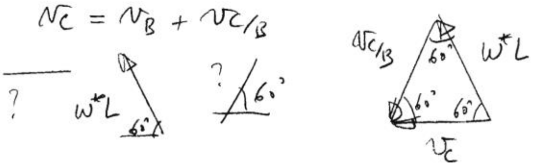


a)



Se comunica una velocidad angular virtual ω^* a la barra AB, y se aplica el teorema de potencias virtuales.

$$v_C = v_B + v_{C/B}$$



$$v_C = \omega^* L$$

$$v_{C/B} = \omega^* L = \omega_{BC} L \Rightarrow$$

$$\omega_{BC} = \omega^* \text{ antr.}$$

$$v_{G_2} = v_C + v_{G_2/C}$$

$$\underset{\omega^* L}{\leftarrow} \qquad \underset{60^\circ}{\nearrow} \; \omega^* \frac{L}{2} \Rightarrow v_{G_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega^* L \uparrow, \quad \frac{3}{4}\omega^* L \leftarrow$$

$$\dot{W}^* = -Mg\,\cancel{\omega^*}\frac{\cancel{L}}{2}\cos 30 - Mg\frac{\sqrt{3}}{4}\cancel{\omega^*}\cancel{L} + F_k\,\cancel{\omega^*}\cancel{L} = 0$$

$$F_k = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg = k\left(l_0 - l_{\varphi=30^\circ}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}Mg = k\left[l_0 - (2'5L - 2L\cos 30^\circ)\right] = k\left[l_0 - 2'5L + \sqrt{3}L\right]$$

$$\boxed{l_0 = \frac{\sqrt{3}Mg}{2k} + \left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)L}$$

b) Para poder calcular la velocidad angular de la barra AB en un instante posterior al inicial, es preciso aplicar la ecuación del trabajo y la energía.

$$\begin{cases} x_{G_2} = \frac{3L}{2}\cos\varphi \\ y_{G_2} = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_2} = -\frac{3L}{2}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi \\ \dot{y}_{G_2} = \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = \frac{9L^2}{4}\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi = \frac{L^2\dot{\varphi}^2}{4}(9\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) =$$
$$= L^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{4} + 2\operatorname{sen}^2\varphi\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\varphi}^2 =$$
$$= \frac{1}{6}ML^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{4} + 2\operatorname{sen}^2\varphi\right) + \frac{1}{24}ML^2\dot{\varphi}^2 = ML^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{3} + \operatorname{sen}^2\varphi\right)$$

$$V = Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi + Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}k\left[l_0 - (2'5L - 2L\cos\varphi)\right]^2 =$$
$$= MgL\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}k\left[\frac{\sqrt{3}Mg}{2k} + (2'5 - \sqrt{3})L - 2'5L + 2L\cos\varphi\right]^2 =$$
$$= MgL\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}k\left[\frac{\sqrt{3}Mg}{2k} - \sqrt{3}L + 2L\cos\varphi\right]^2$$

$$\begin{cases} (T+V)_{\varphi=0^\circ} = \frac{1}{2}k\left[\frac{\sqrt{3}Mg}{2k} - \sqrt{3}L + 2L\right]^2 \\ (T+V)_{\varphi=30^\circ} = \frac{7}{12}ML^2\omega^2 + \frac{1}{2}MgL + \frac{1}{2}k\left[\frac{\sqrt{3}Mg}{2k}\right]^2 \end{cases}$$ Igualando ambas cantidades,

Si: $M=1$, $L=1$, $k=100$, $g=9'81$

$$\frac{100}{2}\left[\frac{\sqrt{3}\times 9'81}{2\times 100} - \sqrt{3} + 2\right]^2 = \frac{7}{12}\omega^2 + \frac{9'81}{2} + \frac{100}{2}\left[\frac{\sqrt{3}\times 9'81}{2\times 100}\right]^2$$

$$\boxed{\omega = 1'28 \text{ rad/s}}$$