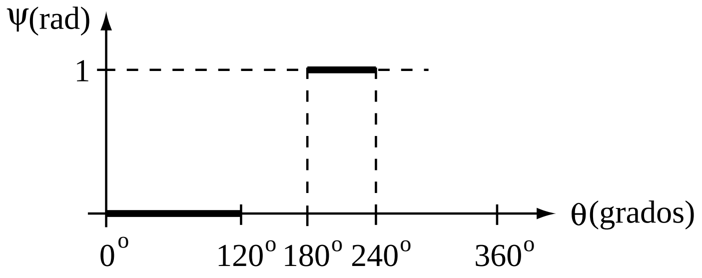
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 98
Nombre...

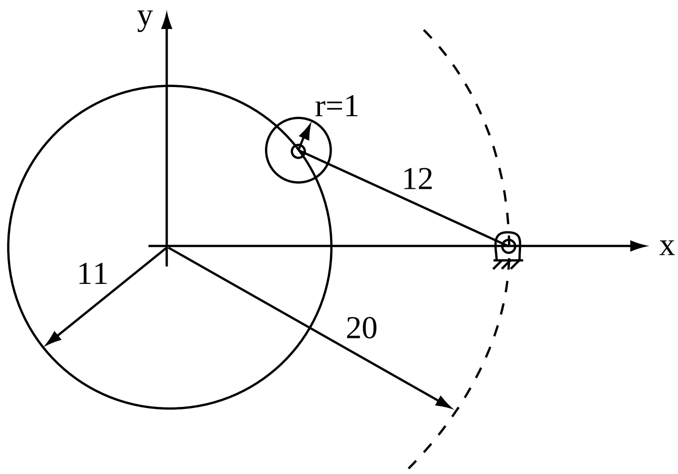
Se pretende diseñar una leva de disco con seguidor oscilante de rodillo, que verifique el diagrama de desplazamiento que se muestra en la figura.



Lo primero es conectar los tramos horizontales mediante funciones que garanticen continuidad en posición, velocidad y aceleración. En este caso, se tomarán funciones cicloidales.

a) Obtener las expresiones analíticas de los tramos de avance y descenso, así como sus derivadas con respecto al ángulo de giro de la leva, θ.

Para el diseño de la leva, se adoptarán los parámetros de partida que se indican en la figura.

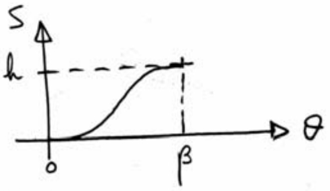


b) Determinar analíticamente las ecuaciones paramétricas del perfil de la leva.

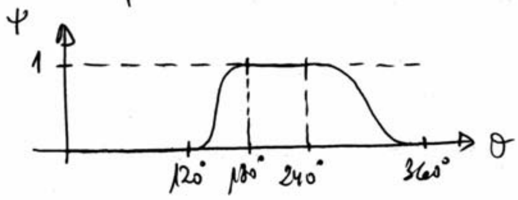
c) Particularizar las ecuaciones del apartado anterior para obtener las coordenadas *x* e *y* del perfil de la leva correspondientes a unos ángulos de giro de la misma, θ=60º y θ=150º.

a) La expresión analítica que nos proporciona la función cicloidal que salva un escalón de altura h en una longitud de abscisa β, es

$$s = \frac{h}{\beta}\theta - \frac{h}{2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\beta}\theta\right)$$



Aplicando esto a nuestro caso tenemos que,



Tramo 120°–180°

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\pi/3}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{\pi/3}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

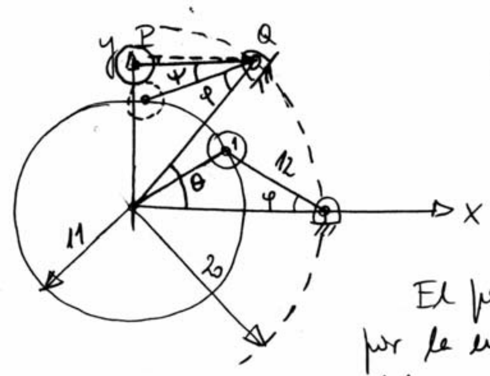
$$\boxed{\begin{aligned}\psi(\theta) &= \frac{3}{\pi}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,6\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\\ \psi'(\theta) &= \frac{3}{\pi}\left[1 - \cos 6\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\end{aligned}}$$

Tramo 240°–360°

$$\psi(\theta) = 1 - \left[\frac{1}{2\pi/3}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{2\pi/3}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(\theta) &= 1 - \frac{3}{2\pi}\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,3\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\\ \psi'(\theta) &= -\frac{3}{2\pi}\left[1 - \cos 3\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\right]\end{aligned}}$$

b)



Lo primero será determinar el valor del ángulo φ.

$$11^2 = 20^2 + 12^2 - 2\times 20\times 12\cos\varphi$$

$$\underline{\varphi = 28'21^\circ}$$

El perfil de la leva estará formado por la envolvente de las distintas posiciones del seguidor, que es un rodillo, esto es, una circunferencia. Su ecuación será,

$$(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Obviamente, se cumplen las relaciones,

$$\begin{cases} x_Q = 20\cos\theta \\ y_Q = 20\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_P = x_Q - 12\cos(\theta-\psi-\varphi) = \boxed{20\cos\theta - 12\cos(\psi+\varphi-\theta) = x_P} \\ y_P = y_Q - 12\,\mathrm{sen}(\theta-\psi-\varphi) = \boxed{20\,\mathrm{sen}\,\theta + 12\,\mathrm{sen}(\psi+\varphi-\theta) = y_P} \end{cases} \quad (A)$$

Para obtener la envolvente de la familia de curvas formada por las distintas posiciones del seguidor, hay que derivar (1) con respecto al ángulo θ.

$$-2(x-x_P)\frac{dx_P}{d\theta} - 2(y-y_P)\frac{dy_P}{d\theta} = 0$$

$$(x-x_P)\frac{dx_P}{d\theta} + (y-y_P)\frac{dy_P}{d\theta} = 0 \quad (2)$$

Las derivadas que aparecen valen,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx_P}{d\theta} &= -20\,\mathrm{sen}\,\theta + 12(\psi'-1)\,\mathrm{sen}(\psi+\varphi-\theta) \\ \frac{dy_P}{d\theta} &= 20\cos\theta + 12(\psi'-1)\cos(\psi+\varphi-\theta) \end{aligned}} \quad (B)$$

De (2) se puede despejar, $(x-x_P) = -(y-y_P)\dfrac{dy_P/d\theta}{dx_P/d\theta}$ (3)

e introduciendo esto en (1),

$$\boxed{y = y_P - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy_P/d\theta}{dx_P/d\theta}\right)^2}}}$$; y volviendo a (3), $$\boxed{x = x_P - \frac{dy_P/d\theta}{dx_P/d\theta}(y-y_P)}$$

Entonces, combinando estas expresiones junto con las (A) y (B), se pueden conocer las coordenadas del perfil de la leva correspondientes a cualquier valor del ángulo de giro de la misma.

c) Concretamente, si $\theta = 60°$ tendremos,

$$\Psi(60°) = 0 \quad ; \quad \Psi'(60°) = 0$$

$$x_P = 20\cos 60 - 12\cos(28'21 - 60) = -0'2$$

$$y_P = 20\,\text{sen}\,60 + 12\,\text{sen}(28'21 - 60) = 10'999$$

$$\frac{dx_P}{d\theta} = -20\,\text{sen}\,60 + 12(-1)\,\text{sen}(28'21 - 60) = -10'999$$

$$\frac{dy_P}{d\theta} = 20\cos 60 + 12(-1)\cos(28'21 - 60) = -0'2$$

$$y = 10'999 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-0'2}{-10'999}\right)^2}} = \boxed{9'999 = y}$$

$$x = -0'2 - \frac{-0'2}{-10'999}(9'999 - 10'999) = \boxed{-0'182 = x}$$

Mientras que para $\theta = 150°$,

$$\Psi(150°) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \Psi'(150°) = \frac{6}{\pi}$$

$$x_P = 20\cos 150 - 12\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{180}{\pi} + 28'21 - 150\right) = -16'661$$

$$y_P = 20\,\text{sen}\,150 + 12\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\times\frac{180}{\pi} + 28'21 - 150\right) = -1'982$$

$$\frac{dx_P}{d\theta} = -20\,\text{sen}\,150 + 12\left(\frac{6}{\pi} - 1\right)\text{sen}\left(\frac{1}{2}\times\frac{180}{\pi} + 28'21 - 150\right) = -20'902$$

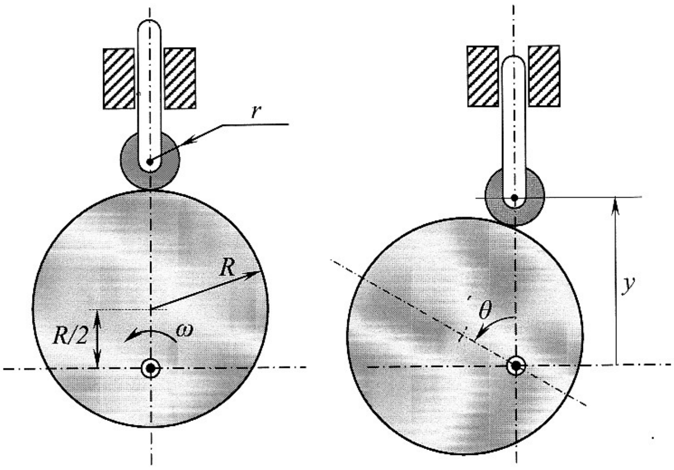
$$\frac{dy_P}{d\theta} = 20\cos 150 + 12\left(\frac{6}{\pi} - 1\right)\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{180}{\pi} + 28'21 - 150\right) = -17'921$$

$$y = -1'982 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-17'921}{-20'902}\right)^2}} = \boxed{-2'741 = y}$$

$$x = -16'661 - \frac{-17'921}{-20'902}(-2'741 + 1'982) = \boxed{-16'010 = x}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 09
Nombre ....

El sistema excéntrica-seguidor de la figura se utiliza en el mecanismo de accionamiento de una segadora.



Obtener:

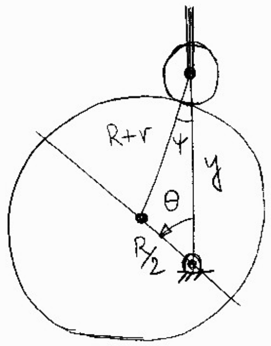
a) La ecuación del desplazamiento del seguidor, y, en función del ángulo girado por la excéntrica, θ.

b) La ecuación de la derivada primera del desplazamiento del seguidor con respecto al ángulo girado por la excéntrica, $\frac{dy}{d\theta}$.

c) La ecuación que proporciona el valor del ángulo de presión, ψ, en función del ángulo girado por la excéntrica, θ.

d) El valor máximo del ángulo de presión, y el valor del ángulo θ para el que se produce.

e) La ecuación de la velocidad del seguidor, $\dot{y}$, en función del ángulo girado por la excéntrica θ, si ésta gira con velocidad constante ω.



a) Aplicando el teorema del coseno a la posición genérica,

$$(R+r)^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2+y^2-2\frac{R}{2}y\cos\theta$$

$$y^2-(R\cos\theta)\,y+\left(\frac{R}{2}\right)^2-(R+r)^2=0$$

$$\boxed{y=\frac{R}{2}\cos\theta\pm\sqrt{\left(\frac{R\cos\theta}{2}\right)^2+(R+r)^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}}$$

Atendiendo al valor de y para $\theta=0$, el signo a elegir para la raíz sería el positivo.

b) Derivando la ecuación anterior,

$$\boxed{\frac{dy}{d\theta}=-\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{\left(\frac{R\cos\theta}{2}\right)^2+(R+r)^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}}}$$

c) El ángulo de presión se obtiene aplicando el teorema del seno a la posición genérica,

$$\frac{R/2}{\operatorname{sen}\psi}=\frac{R+r}{\operatorname{sen}\theta}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\psi=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{R/2}{R+r}\operatorname{sen}\theta\right)}$$

d) Para obtener el valor máximo del ángulo de presión, se deriva la ecuación de éste con respecto al ángulo, y se iguala a cero,

$$\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{\frac{R/2}{R+r}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{(R/2)^2}{(R+r)^2}\operatorname{sen}^2\theta}}=0\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\begin{cases}90^\circ\\270^\circ\end{cases}$$

El máximo y el mínimo del ángulo de presión se producen para,

$$\boxed{\theta = 90^\circ \longrightarrow \psi = \arcsin\left(\frac{R/2}{R+r}\right)}$$

$$\theta = 270^\circ \longrightarrow \psi = -\arcsin\left(\frac{R/2}{R+r}\right)$$

e) $$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\omega$$

$$\boxed{\dot{y} = \omega\left[-\frac{R}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{R\cos\theta}{2}\right)^2 + (R+r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}}\right]}$$