

CAPITULO 3:

PROBLEMAS DINAMICOS

La Dinámica estudia la relación entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre ellos. En el caso de un sistema mecánico, existen dos enfoques de esta cuestión que resultan interesantes: el problema dinámico directo, que consiste en obtener el movimiento del sistema conocidas las fuerzas que actúan sobre él; y el problema dinámico inverso, en el que se trata de averiguar qué valor de las fuerzas es el que da lugar a un determinado movimiento.

La resolución del problema dinámico directo es lo que se denomina simulación dinámica de un sistema mecánico. Es de gran interés porque permite predecir el comportamiento del sistema (supóngase, por ejemplo, un vehículo automóvil), sin necesidad de construir un prototipo. Lógicamente, dicho comportamiento será tanto más realista cuanto lo sea la modelización del sistema y las fuerzas a que se ve sometido. En cualquier caso, ésta es una herramienta de indudable utilidad para el diseñador, ya que hace posible observar el efecto de distintas modificaciones en el diseño, en un tiempo mucho menor que el que sería preciso por la vía experimental. Desde el punto de vista del cálculo, requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, por lo que exige un considerable esfuerzo computacional, muy superior al exigido por los problemas cinemáticos vistos en el capítulo anterior. Su complejidad también es mucho mayor.

El problema dinámico inverso presenta dos vertientes: el cálculo de los esfuerzos motores necesarios para lograr un movimiento determinado, y el cálculo de las fuerzas y momentos de reacción que se producen en los pares cinemáticos del mecanismo como consecuencia de dicho movimiento. La obtención de esfuerzos motores tiene gran interés en áreas como la Robótica, cuando se pretende guiar un manipulador. Por otro lado, el conocimiento de estos esfuerzos junto con el de las reacciones en los pares, permiten llevar a cabo el proceso de diseño de una máquina, pues se trata de las cargas que habrán de soportar las diversas piezas durante su funcionamiento. La resolución del problema dinámico inverso es mucho más simple que la del problema directo, ya que no entraña la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales, sino tan sólo algebraicos.

1. Las ecuaciones de la Dinámica.

Cuando se pretende resolver la Dinámica de sistemas de sólidos indeformables, las primeras ecuaciones que, seguramente, nos vienen a la cabeza son las de

Newton-Euler, obtenidas tras haber particularizado los teoremas fundamentales de la Dinámica para el caso de un sólido rígido.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{N} = \mathbf{I}_G \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

Sin embargo, este planteamiento no es muy apropiado con carácter general, ya que conduce a sistemas de ecuaciones de gran tamaño por considerar como incógnitas las reacciones en los pares cinemáticos, además del propio movimiento. Por tanto, el tamaño del sistema es siempre igual a seis veces el número de sólidos móviles que posea el mecanismo.

En consecuencia, se opta por planteamientos que conduzcan a un tamaño del problema proporcional al número de grados de libertad del mismo, muy inferior generalmente a seis por el número de sólidos. Un ejemplo clásico de estos planteamientos son las ecuaciones de Lagrange, resultado de aplicar el principio de las potencias virtuales a los teoremas fundamentales. Las ecuaciones de Lagrange en coordenadas independientes toman la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{Q} \quad (3)$$

donde T es la energía cinética y \mathbf{Q} son las fuerzas generalizadas sobre esas coordenadas independientes \mathbf{z} . El número de ecuaciones es igual al número de grados de libertad, y también el número de incógnitas. Expresar la cinemática, necesaria para el cálculo de la energía cinética, en función de unas coordenadas independientes y sus derivadas, no es tarea fácil de sistematizar, como ya se vio en el capítulo dedicado a los problemas cinemáticos, y tampoco lo es el cálculo de las fuerzas generalizadas. Es por ello que se prefiere abordar el problema dinámico también en coordenadas dependientes. Las ecuaciones de Lagrange en este caso son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (4)$$

donde el tercer sumando del lado izquierdo de la ecuación (4) representa los esfuerzos requeridos para mantener las restricciones entre las distintas variables dependientes \mathbf{q} .

Habitualmente, la energía cinética se escribe como,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

donde \mathbf{M} es la llamada matriz de masas. De esta forma, la ecuación (4) adopta la siguiente forma,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (6)$$

Si la matriz de masas no es constante, el vector de fuerzas generalizadas de la ecuación (6) incluye ahora fuerzas de inercia centrífugas y de Coriolis, resultado de la derivación de la energía cinética.

El sistema (6) representa n ecuaciones, donde n es el número de variables. Sin embargo, el número de incógnitas es $n+m$, dado que hay m multiplicadores de Lagrange desconocidos (tantos como ecuaciones de restricción entre las variables). Es necesario, por tanto, añadir otras m ecuaciones, que no son otras que las propias ecuaciones de restricción. Entonces, el sistema a resolver es,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^t \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (7)$$

$$\Phi = \mathbf{0} \quad (8)$$

que constituye un sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas (en inglés, DAE), ya que (7) son n ecuaciones diferenciales y (8) son m ecuaciones algebraicas.

2. Matriz de masas y vector de fuerzas generalizadas.

Vamos a explicar en este apartado cómo se calculan estos dos términos que han aparecido en las ecuaciones de la Dinámica de un sistema mecánico cualquiera.

2.1 Matriz de masas de un elemento genérico plano.

Ya se explicó en el capítulo correspondiente que los elementos planos se modelizan en coordenadas naturales mediante puntos. También se dijo que, para la correcta definición de un elemento plano, era necesario contar, al menos, con las coordenadas de dos de sus puntos. Por consiguiente, aquí se va a mostrar cuál es la matriz de masas de un elemento plano cualquiera, en base a los dos puntos utilizados para su definición. Si se han empleado más puntos, basta con escoger dos de ellos.

Sea el elemento genérico plano definido por dos puntos que se muestra en la figura 1.

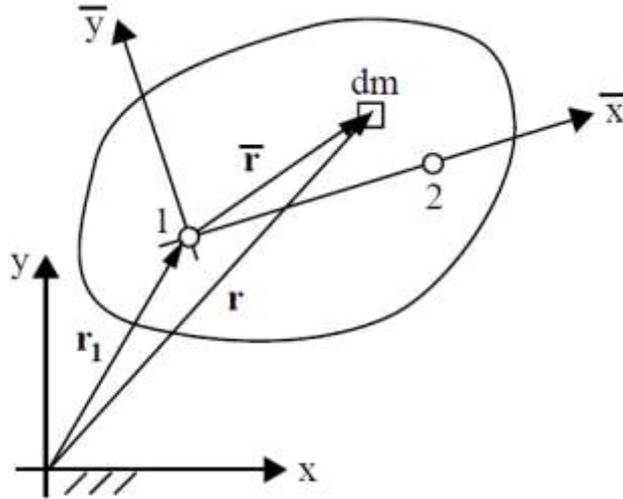


Figura 1. Elemento genérico plano.

La posición de un punto cualquiera del elemento puede expresarse como,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}} \quad (9)$$

donde \mathbf{A} es la matriz de rotación de los ejes locales respecto a los generales. Si llamamos L a la distancia que separa a los puntos 1 y 2, se puede escribir la matriz de rotación \mathbf{A} en función de las coordenadas de ambos puntos,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Derivando respecto al tiempo la expresión (9) se tiene la velocidad de un punto cualquiera del elemento,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{r}} \quad (11)$$

siendo,

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 & \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 & \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

La energía cinética del elemento será,

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{r}} dm \quad (13)$$

y sustituyendo la expresión (11) se llega a los siguientes cuatro sumandos,

$$T = \frac{1}{2} \left[\int \dot{\mathbf{r}}_1^t \dot{\mathbf{r}}_1 \, dm + \int \dot{\mathbf{r}}_1^t \dot{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{r}} \, dm + \int \bar{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{A}}^t \dot{\mathbf{r}}_1 \, dm + \int \bar{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{A}}^t \dot{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{r}} \, dm \right] \quad (14)$$

Puede observarse que el integrando del tercer sumando es el traspuesto del integrando del segundo sumando. Como la cantidad final es un escalar, ambos valores serán idénticos.

En el primer sumando, las velocidades del punto 1 pueden salir de la integral, que no es otra cosa que la masa del elemento. En el segundo y tercero, que como ya se ha dicho valen lo mismo, puede extraerse de la integral la velocidad del punto 1 y la derivada de la matriz de rotación, resultando contener la integral los momentos estáticos de primer orden del elemento respecto a los ejes locales. El cuarto sumando debe desarrollarse totalmente, ya que no es posible extraer nada fuera de la integral correspondiente. Tras todo lo dicho, la energía cinética queda como sigue,

$$T = \frac{1}{2} \left[m \dot{\mathbf{r}}_1^t \dot{\mathbf{r}}_1 + 2m \dot{\mathbf{r}}_1^t \dot{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{r}}_G + \frac{I_1}{L^2} \left[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \right] \right] \quad (15)$$

donde m es la masa del elemento, $\bar{\mathbf{r}}_G$ es el vector local de posición del centro de gravedad e I_1 es el momento de inercia del elemento respecto al punto 1, origen del sistema local. Entonces, la energía cinética puede escribirse de la siguiente forma,

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \dot{x}_1 \dot{y}_1 \dot{x}_2 \dot{y}_2 \right\} \begin{bmatrix} m - 2m \frac{\bar{x}_G}{L} + \frac{I_1}{L^2} & 0 & m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} & -m \frac{\bar{y}_G}{L} \\ 0 & m - 2m \frac{\bar{x}_G}{L} + \frac{I_1}{L^2} & m \frac{\bar{y}_G}{L} & m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} \\ m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} & m \frac{\bar{y}_G}{L} & \frac{I_1}{L^2} & 0 \\ -m \frac{\bar{y}_G}{L} & m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} & 0 & \frac{I_1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

de donde, según se vio en la expresión (5), se deduce que la matriz de masas del elemento es,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m - 2m \frac{\bar{x}_G}{L} + \frac{I_1}{L^2} & 0 & m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} & -m \frac{\bar{y}_G}{L} \\ 0 & m - 2m \frac{\bar{x}_G}{L} + \frac{I_1}{L^2} & m \frac{\bar{y}_G}{L} & m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} \\ m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} & m \frac{\bar{y}_G}{L} & \frac{I_1}{L^2} & 0 \\ -m \frac{\bar{y}_G}{L} & m \frac{\bar{x}_G}{L} - \frac{I_1}{L^2} & 0 & \frac{I_1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

En esta matriz aparecen los términos de inercia clásicos: m es la masa del elemento; \bar{x}_G e \bar{y}_G son las coordenadas del centro de gravedad del elemento en el sistema de referencia local; I_1 es el momento de inercia del elemento respecto al punto 1, origen del sistema local. Además, aparece la distancia entre los puntos 1 y 2, L .

Nótese que la matriz de masas de un elemento genérico plano es constante, lo que significa que en las ecuaciones dinámicas dadas por (6), el vector de fuerzas generalizadas \mathbf{Q} no contendrá fuerzas de inercia dependientes de la velocidad (centrífugas y de Coriolis).

2.2 Matriz de masas de un elemento genérico tridimensional.

Ya se explicó al hablar de modelización de elementos tridimensionales cuáles eran las variables –puntos y vectores unitarios– mínimas necesarias para definirlos correctamente. Para la obtención de la matriz de masas de un elemento vamos a suponer que se han definido un punto y tres vectores no coplanarios. Los vectores no tienen por qué ser unitarios. Ya veremos después cómo adaptar la matriz en el caso de una modelización cualquiera del elemento.

Sea el elemento genérico tridimensional que se muestra en la figura 2.

La posición de un punto cualquiera del elemento puede escribirse de la siguiente forma,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v} + c_3 \mathbf{w} = \mathbf{r}_1 + [\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}] \mathbf{c} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{X} \mathbf{c} \quad (18)$$

donde \mathbf{X} es una matriz 3x3 cuyas columnas son las componentes de los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , respectivamente. Lógicamente, la misma relación también es cierta en coordenadas locales del elemento,

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_1 + c_1 \bar{\mathbf{u}} + c_2 \bar{\mathbf{v}} + c_3 \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{r}}_1 + [\bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{v}} \quad \bar{\mathbf{w}}] \mathbf{c} = \bar{\mathbf{r}}_1 + \bar{\mathbf{X}} \mathbf{c} \quad (19)$$

de manera, que el vector de coeficientes \mathbf{c} puede obtenerse como,

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1) \quad (20)$$

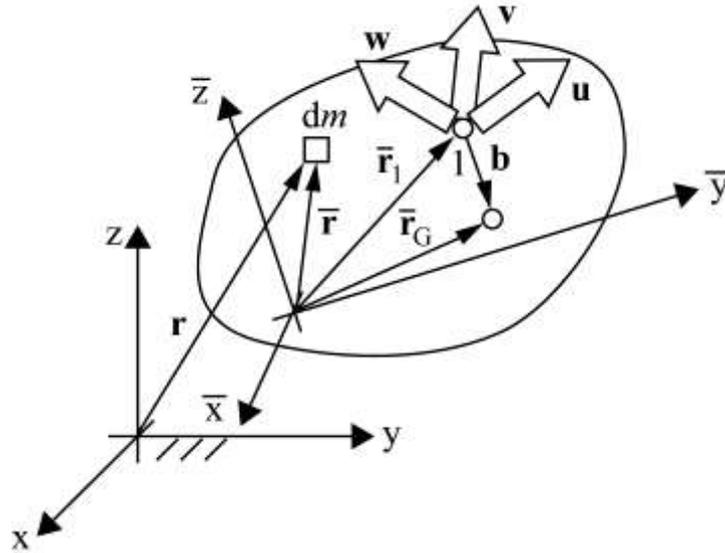


Figura 2. Elemento genérico tridimensional.

Quede claro que estos coeficientes se mantendrán constantes a lo largo del movimiento del elemento, ya que se han obtenido en base a coordenadas locales de puntos y vectores, que no variarán por ser el elemento indeformable.

Visto cómo obtener los coeficientes contenidos en el vector \mathbf{c} , vamos a expresar la posición de un punto cualquiera del elemento de una forma más compacta que la dada por la ecuación (18).

$$\mathbf{r} = \left[\mathbf{I} \quad c_1 \mathbf{I} \quad c_2 \mathbf{I} \quad c_3 \mathbf{I} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (21)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad 3x3. Como la matriz \mathbf{C} es constante, la velocidad del punto genérico del elemento será,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

Entonces, la energía cinética del elemento se puede escribir,

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \left(\int \mathbf{C}^t \mathbf{C} dm \right) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (23)$$

de donde la matriz de masas será,

$$\mathbf{M} = \int \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 & c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 & c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} dm = \int \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}^t \\ \mathbf{c} & \mathbf{c}\mathbf{c}^t \end{bmatrix} dm \quad (24)$$

La matriz de masas ha de ser de 12x12. Sin embargo, por motivos de claridad, a partir de aquí se representará de 4x4, debiéndose asumir que cada elemento de la matriz va multiplicado por una matriz identidad 3x3.

Recuérdese que el vector \mathbf{c} es un vector columna de tamaño 3x1 que contiene los coeficientes que permiten expresar la posición de un punto cualquiera en la base del elemento constituida por el punto 1 y los tres vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} (18).

A continuación se desarrolla cada uno de los cuatro términos que aparecen en la expresión (24). El primero, correspondiente al 1 de la matriz, es trivial, pues se trata de la masa del elemento. Veamos el segundo y el tercero, que son iguales (uno es el traspuesto del otro).

$$\int \mathbf{c} dm = \int \bar{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1) dm = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1) dm = m\bar{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1) \quad (25)$$

Y, por último, el cuarto,

$$\int \mathbf{c}\mathbf{c}^t dm = \int \bar{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1)^t \bar{\mathbf{X}}^{-t} dm = \bar{\mathbf{X}}^{-1} \left(\int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1)^t dm \right) \bar{\mathbf{X}}^{-t} \quad (26)$$

La integral que se encuentra entre paréntesis en la expresión anterior requiere ser desarrollada aparte. La llamaremos \mathbf{Int} . Se ve que tendrá relación con los momentos de inercia del sólido respecto al punto 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{Int} &= \int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1)^t dm = \int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G + \bar{\mathbf{b}})(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G + \bar{\mathbf{b}})^t dm = \\ &= \int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G)(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G)^t dm + \int \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}^t dm + \int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G)\bar{\mathbf{b}}^t dm + \int \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G)^t dm \quad (27) \end{aligned}$$

El primer sumando de (27) estará relacionado con los momentos de inercia del sólido respecto a unos ejes paralelos a los locales situados en el centro de gravedad,

$$\mathbf{\Pi}_G = \int (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G)(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_G)^t dm =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_x + I_y + I_z) & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & \frac{1}{2}(I_x - I_y + I_z) & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_x + I_y - I_z) \end{bmatrix} \quad (28)$$

El segundo término de (27) es el término de Steiner, producto de la masa del elemento por la distancia entre el punto 1 y el centro de gravedad elevada al cuadrado,

$$\int \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}^t dm = m\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}^t = m(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)^t \quad (29)$$

Los términos tercero y cuarto de (27) son nulos, ya que el vector $\bar{\mathbf{b}}$ sale de la integral, quedando los momentos estáticos de primer orden respecto al centro de gravedad del elemento, que obviamente son nulos.

Por tanto, ya se puede escribir el resultado de la integral \mathbf{Int} .

$$\mathbf{Int} = \Pi_G + m(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)^t \quad (30)$$

Y con ello también se puede escribir ya la matriz de masas completa.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & m(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)^t \bar{\mathbf{X}}^{-t} \\ m\bar{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1) & \bar{\mathbf{X}}^{-1}(\Pi_G + m(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)(\bar{\mathbf{r}}_G - \bar{\mathbf{r}}_1)^t) \bar{\mathbf{X}}^{-t} \end{bmatrix} \quad (31)$$

donde el valor de $\bar{\mathbf{X}}$ puede verse en (19) y el de Π_G en (28). Obsérvese que se trata de una matriz constante, y que no dará lugar por tanto a la aparición de fuerzas centrífugas y de Coriolis (dependientes de la velocidad) en las ecuaciones dinámicas (6). Recuérdese de nuevo que cada término de esta matriz ha de ir multiplicado por la matriz identidad de 3x3.

En la expresión (31) se ha obtenido la matriz de masas de un elemento modelizado con un punto y tres vectores no coplanarios (que ni siquiera tenían por qué ser unitarios). Pero, ¿qué ocurre si el elemento está modelizado de otra forma? Veamos un ejemplo que permitirá aclarar la forma de proceder en un caso cualquiera.

La expresión (21) relacionaba las coordenadas de un punto cualquiera del elemento con las variables que definían al mismo, la (22) obtenía la velocidad del punto y la (23) calculaba la energía cinética del elemento permitiendo

identificar el valor de la matriz de masas. Supóngase ahora el caso de un elemento modelizado con dos puntos, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , y dos vectores unitarios, \mathbf{u} y \mathbf{v} . Se puede escribir la siguiente relación entre las variables que se han utilizado en el desarrollo de la matriz de masas (un punto y tres vectores) y las variables que realmente modelizan al elemento:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

o bien de manera compacta,

$$\mathbf{q}_o = \mathbf{T}\mathbf{q} \quad (33)$$

donde se ha designado con \mathbf{q}_o a las variables empleadas para el desarrollo de la matriz de masas, y con \mathbf{q} a las que realmente sirven para modelizar el elemento. Entonces, derivando,

$$\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} \quad (34)$$

y esta relación puede sustituirse en la expresión de la energía cinética. Si llamamos \mathbf{M}_o a la matriz de masas dada por (31), esto es, referida a las coordenadas \mathbf{q}_o , la energía cinética será,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_o^t \mathbf{M}_o \dot{\mathbf{q}}_o = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (35)$$

concluyéndose que la matriz de masas referida a las coordenadas \mathbf{q} se obtiene como,

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T} \quad (36)$$

Este procedimiento es aplicable a cualquier otra modelización que se haga del elemento. Conviene observar sin embargo que, en el ejemplo resuelto, la matriz \mathbf{T} de transformación de las coordenadas \mathbf{q} a las \mathbf{q}_o es constante, por lo que la matriz de masas del elemento \mathbf{M} dada por (36) también lo es (recuérdese que \mathbf{M}_o también lo era). Por lo tanto, en las ecuaciones dinámicas (6), no aparecerán términos de fuerzas de inercia dependientes de la velocidad. Este hecho se producirá siempre que el elemento se haya modelizado con puntos y vectores unitarios suficientes para representar un espacio tridimensional (un punto y tres vectores unitarios, dos puntos y dos vectores unitarios, tres puntos

y un vector unitario, cuatro puntos). Por contra, si el elemento se ha definido con menos variables, la matriz de transformación \mathbf{T} no será constante y, en consecuencia, tampoco lo será la matriz de masas del elemento, apareciendo fuerzas de inercia dependientes de la velocidad en las ecuaciones dinámicas (6). Veamos un ejemplo de esta otra posibilidad.

Sea un elemento modelizado con dos puntos y un vector unitario no alineado con los puntos. La transformación de coordenadas será la siguiente,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{u}} & \tilde{\mathbf{u}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

donde la matriz $\tilde{\mathbf{u}}$ es la matriz antisimétrica dual del vector \mathbf{u} dada por,

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Nótese que el vector \mathbf{w} se ha obtenido como producto vectorial de \mathbf{u} por el vector diferencia de los puntos 2 y 1.

Entonces, puede observarse que ahora la matriz de transformación \mathbf{T} vale,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{u}} & \tilde{\mathbf{u}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (39)$$

que ya no es constante, pues aparecen en ella las componentes del vector unitario \mathbf{u} , que serán variables en el tiempo. Por tanto, al derivar ahora la expresión (33) se obtiene,

$$\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{T}}\mathbf{q} \quad (40)$$

Expresión que ya no resulta adecuada para introducir en la energía cinética y deducir la matriz de masas del elemento. Sin embargo, la igualdad (40) puede reescribirse agrupando los términos de forma distinta como,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{u}} & \tilde{\mathbf{u}} & -\tilde{\mathbf{r}}_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

siendo $\tilde{\mathbf{r}}_{12}$ una matriz antisimétrica dual del vector $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ cuya expresión es,

$$\tilde{\mathbf{r}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -(z_2 - z_1) & (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) & 0 & -(x_2 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Por lo tanto, ya se puede escribir la relación de velocidades dada por (41) como,

$$\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} \quad (43)$$

Expresión idéntica a (34) y que conduce a la expresión de la matriz de masas obtenida en (36), siendo en esta ocasión la matriz \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{u}} & \tilde{\mathbf{u}} & -\tilde{\mathbf{r}}_{12} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Se ve por tanto que, sea cual sea la modelización del elemento, será preciso llegar a relacionar las velocidades $\dot{\mathbf{q}}_o$ con las velocidades $\dot{\mathbf{q}}$, de manera que se cumpla la igualdad (43). Logrado esto, la matriz de masas del elemento se obtendrá como,

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T} \quad (45)$$

Por tanto, en este caso, la matriz de masas será variable, por serlo la matriz \mathbf{T} . Es importante resaltar que, al ser variable la matriz de masas, esto es, dependiente de las posiciones, sí aparecerán fuerzas de inercia dependientes de las velocidades en el vector \mathbf{Q} de la ecuación (6). En efecto, al aplicar las ecuaciones de Lagrange a la energía cinética con \mathbf{M} variable tenemos,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \right]^t \dot{\mathbf{q}} \quad (46)$$

cumpléndose que,

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (47)$$

Por tanto, las ecuaciones dinámicas se podrán escribir como,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^t \lambda = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_v \quad (48)$$

donde \mathbf{Q}_v es el vector que contiene las fuerzas de inercia dependientes de la velocidad, cuyo valor es,

$$\mathbf{Q}_v = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \right]^t \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} \quad (49)$$

Si se tiene en cuenta que la matriz de masas \mathbf{M} se ha obtenido como el producto,

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T} \quad (50)$$

donde \mathbf{M}_o es una matriz constante, el vector \mathbf{Q}_v se puede desarrollar más, quedando,

$$\mathbf{Q}_v = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \left[\frac{\partial(\mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T})}{\partial q_1} \dot{\mathbf{q}} \quad \dots \quad \frac{\partial(\mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T})}{\partial q_n} \dot{\mathbf{q}} \right] - [\dot{\mathbf{T}}^t \mathbf{M}_o \mathbf{T} + \mathbf{T}^t \mathbf{M}_o \dot{\mathbf{T}}] \dot{\mathbf{q}} \quad (51)$$

La matriz $\dot{\mathbf{T}}$, para el ejemplo desarrollado anteriormente, se obtiene derivando la expresión (44),

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{\tilde{\mathbf{u}}} & \dot{\tilde{\mathbf{u}}} & -\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{12} \end{bmatrix} \quad (52)$$

donde $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{12}$ son las matrices antisimétricas 3x3 calculadas por derivación de (38) y (42) respectivamente.

La expresión (51) para las fuerzas de inercia dependientes de la velocidad es totalmente general. La forma concreta que adopte será función de cómo sea la matriz \mathbf{T} en cada caso. Nótese que los dos sumandos que aparecen entre

corchetes en el segundo sumando de (51), son uno el traspuesto del otro, por lo que será suficiente con calcular uno de ellos.

2.3 Vector de fuerzas generalizadas sobre un elemento.

Se va a explicar en este apartado cómo formar el vector de fuerzas generalizadas de un elemento del mecanismo para fuerzas y momentos puntuales aplicados sobre el mismo.

Se comienza con el caso de una fuerza aplicada en un punto del elemento, según se muestra en la figura 3.

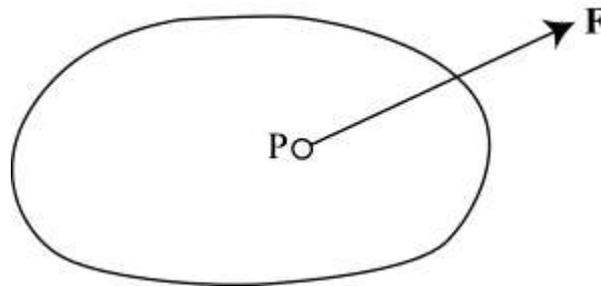


Figura 3. Fuerza puntual sobre un elemento.

Supóngase para empezar que el elemento se ha definido con un punto y tres vectores no coplanarios, de la misma forma que se hizo en el apartado anterior para la matriz de masas, y que puede verse en la figura 2.

Entonces, según se indicó en (22), la velocidad del punto P sobre el que se aplica la fuerza puede escribirse en función de las derivadas de las variables que definen el elemento como,

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{C}_P \dot{\mathbf{q}} \quad (53)$$

donde \mathbf{C}_P es una matriz que contiene los coeficientes que expresan la posición del punto P en la base del elemento, según puede verse en (21) y (22).

Para conocer el valor del vector de fuerzas generalizadas sobre el elemento a que da lugar la fuerza puntual, se recurre a calcular la potencia virtual de la fuerza. Dos sistemas de fuerzas que produzcan idéntica potencia virtual son equivalentes desde el punto de vista de su efecto dinámico.

$$\dot{\tilde{W}} = \mathbf{F}^t \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_P = \mathbf{F}^t \mathbf{C}_P \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q}^t \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (54)$$

Identificando términos se tiene que,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_p^t \mathbf{F} \quad (55)$$

En el caso de que el elemento no se haya modelizado con un punto y tres vectores, se procederá de la misma forma en que se hacía en el apartado anterior para la matriz de masas. Llamando $\dot{\mathbf{q}}_o$ a las velocidades que han servido para llegar a (55), y $\dot{\mathbf{q}}$ a las derivadas de las variables que realmente definen el elemento, se tiene,

$$\dot{\mathbf{q}}_o = \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}}$$

Entonces, recurriendo nuevamente a la potencia virtual,

$$\dot{\tilde{W}} = \mathbf{Q}_o^t \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_o = \mathbf{Q}_o^t \mathbf{T} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q}^t \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (56)$$

donde \mathbf{Q}_o es el vector de fuerzas obtenido en (55), y \mathbf{Q} es el vector de fuerzas sobre las variables que realmente definen el elemento. Por tanto, identificando términos en (56) se llega a,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^t \mathbf{Q}_o \quad (57)$$

expresión que proporciona el vector de fuerzas generalizadas sobre el elemento.

Si nos encontramos ante un caso plano, de manera que el elemento se halle modelizado con al menos dos puntos, como se ve en la figura 4, se pueden establecer las ecuaciones (9) y (10), que se reescriben aquí para más comodidad,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}} \quad (58)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

donde L es la distancia entre los puntos básicos 1 y 2.

Entonces, el vector de posición del punto P puede escribirse como,

$$\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_P \\ \bar{y}_P \end{Bmatrix} \quad (60)$$

donde \bar{x}_P e \bar{y}_P son las coordenadas del punto P en el sistema de referencia local. Agrupando términos,

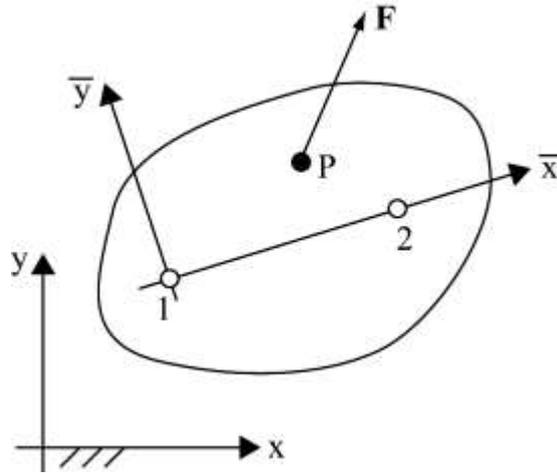


Figura 4. Fuerza puntual sobre un elemento plano.

$$\mathbf{r}_P = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L - \bar{x}_P & \bar{y}_P & \bar{x}_P & -\bar{y}_P \\ -\bar{y}_P & L - \bar{x}_P & \bar{y}_P & \bar{x}_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_P \mathbf{q} \quad (61)$$

Como la matriz \mathbf{C}_P es constante, también permite obtener la velocidad del punto P a partir de las velocidades de los dos puntos que modelizan el elemento, en la forma que indica la ecuación (53). Por tanto, el vector de fuerzas generalizadas de un elemento plano se obtiene aplicando (55) con

$$\mathbf{C}_P = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L - \bar{x}_P & \bar{y}_P & \bar{x}_P & -\bar{y}_P \\ -\bar{y}_P & L - \bar{x}_P & \bar{y}_P & \bar{x}_P \end{bmatrix} \quad (62)$$

Existe un caso en el que resulta especialmente sencilla la introducción de una fuerza puntual en un elemento, y es cuando el punto en el que se aplica la fuerza es un punto básico de la modelización del mecanismo. Entonces, las tres componentes de la fuerza (dos en el caso plano) deben ser introducidas directamente en las tres posiciones correspondientes a las coordenadas del punto del vector de fuerzas generalizadas.

Visto como introducir una fuerza puntual sobre un elemento, se indica a continuación cómo considerar otros tipos de cargas.

En el caso de un momento puntual actuando sobre un elemento, bastará con descomponer el momento en un par de fuerzas puntuales equivalentes y aplicar lo visto previamente. Por analogía a lo comentado en el caso de fuerzas

actuando directamente sobre puntos básicos, es interesante indicar aquí el sentido que tiene la introducción directa de las tres componentes de una fuerza en las posiciones correspondientes a las tres componentes de un vector unitario en el vector de fuerzas generalizadas. El efecto de dicha operación equivale al momento puntual producido en el origen del vector unitario por la fuerza en cuestión aplicada en el extremo del mismo. Esta propiedad puede servir para facilitar la introducción de momentos puntuales sobre elementos cuando se disponga en los mismos de vectores unitarios convenientemente orientados respecto al momento concreto a considerar. Por ejemplo, si en la modelización se ha definido un vector unitario perteneciente a determinado elemento que va a ser perpendicular en todo instante a un momento puntual que actúa sobre el mismo, la consideración del momento resultará inmediata al introducir en las tres posiciones del vector de fuerzas generalizadas correspondientes al vector unitario, las componentes de una fuerza cuyo módulo sea igual al del momento puntual, cuya dirección sea perpendicular a ambos y cuyo sentido sea tal que se cumpla la relación $\mathbf{m}=\mathbf{u}\mathbf{f}$, donde \mathbf{m} es el momento puntual, \mathbf{u} el vector unitario y \mathbf{f} la fuerza a introducir en el vector de fuerzas generalizadas.

En el caso de existir fuerzas aplicadas de volumen o de superficie, la forma de proceder sería análoga a la vista para una fuerza puntual, calculando la potencia virtual de la fuerza en cuestión e igualándola a la producida por el vector de fuerzas generalizadas que se pretende determinar. De todas formas, siempre y cuando se trate con sólidos indeformables, las fuerzas de volumen o de superficie podrán reducirse a la resultante (una fuerza puntual) y el momento (un momento puntual) en un punto del sólido, de manera que puede aplicarse lo visto con anterioridad.

2.4 Matriz de masas y vector de fuerzas generalizadas de todo el mecanismo.

Para obtener estos términos se ensamblan las matrices de masas y los vectores de fuerzas generalizadas de todos los elementos que componen el mecanismo.

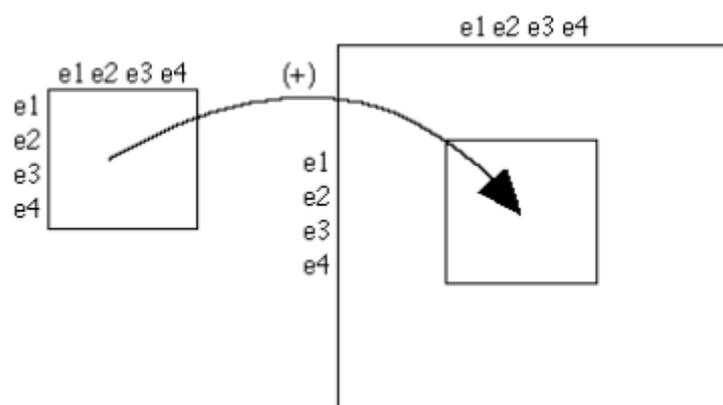


Figura 5. Ensamblaje de la matriz de masas.

Así, si por ejemplo, la matriz de masas del elemento e se ha obtenido en las variables (puntos y/o vectores unitarios) e_1 , e_2 , e_3 y e_4 , los elementos de esa matriz se sumarán sobre los ya existentes en la matriz de masas global en las posiciones correspondientes, según se indica en la figura 5.

Para explicar mejor lo visto, se desarrolla a continuación un ejemplo. Se trata de un péndulo doble formado por un cuadrado de masa m y lado $2r$, y un disco de masa m y radio r (ver figura 6), sometido el conjunto a la acción de la gravedad.

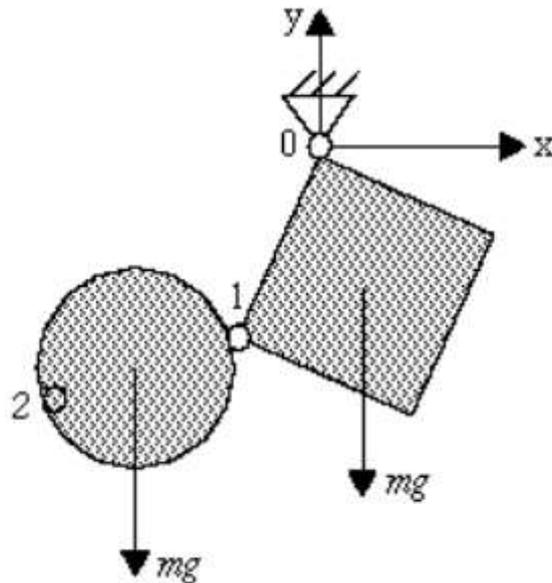


Figura 6. Péndulo doble.

El objetivo es calcular la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas del mecanismo.

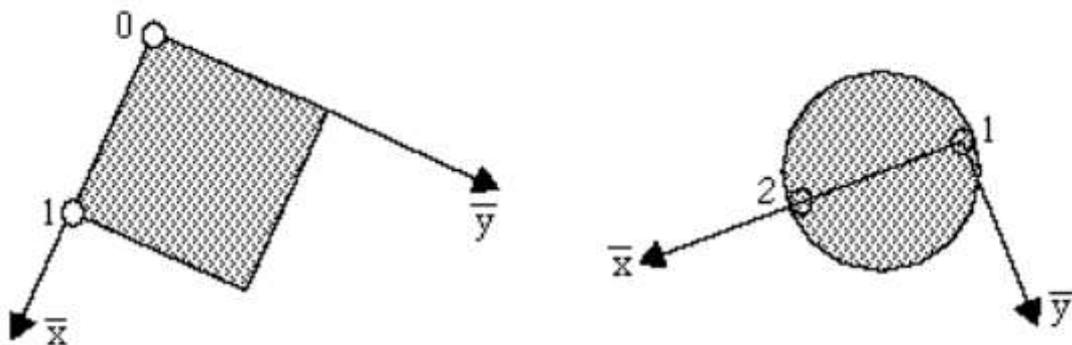


Figura 7. Sistemas de referencia locales.

En primer lugar, se calcula la matriz de masas del primer elemento, el cuadrado de masa m y lado $2r$. Según se vio en el apartado de la matriz de masas de un elemento plano cualquiera, es preciso establecer un sistema de referencia local en el elemento, que tenga el origen en uno de los puntos de la modelización y

cuyo eje x pase por el otro. Entonces, en el caso que nos ocupa, el sistema local queda como se ve en la figura 7.

Los términos que se precisan para formar la matriz de masas del cuadrado son:

$$\bar{x}_G = r \quad ; \quad \bar{y}_G = r \quad ; \quad I_0 = \frac{8}{3}mr^2 \quad ; \quad L = 2r \quad (63)$$

Con lo que su matriz de masas resulta ser,

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}m & 0 & -\frac{1}{6}m & -\frac{1}{2}m \\ 0 & \frac{2}{3}m & \frac{1}{2}m & -\frac{1}{6}m \\ -\frac{1}{6}m & \frac{1}{2}m & \frac{2}{3}m & 0 \\ -\frac{1}{2}m & -\frac{1}{6}m & 0 & \frac{2}{3}m \end{bmatrix} \quad (64)$$

Para el círculo, los términos necesarios valen,

$$\bar{x}_G = r \quad ; \quad \bar{y}_G = 0 \quad ; \quad I_1 = \frac{3}{2}mr^2 \quad ; \quad L = 2r \quad (65)$$

Y la matriz de masas del elemento es,

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8}m & 0 & \frac{1}{8}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{8}m & 0 & \frac{1}{8}m \\ \frac{1}{8}m & 0 & \frac{3}{8}m & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}m & 0 & \frac{3}{8}m \end{bmatrix} \quad (66)$$

Por lo tanto, ensamblando ambas matrices se obtendrá la matriz de masas de todo el mecanismo. La matriz del primer elemento está expresada en las coordenadas del punto 0 y el punto 1. La del segundo elemento en las del punto 1 y el punto 2. Las variables que definen el mecanismo son,

$$\mathbf{q}^T = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2\} \quad (67)$$

ya que el punto 0 es fijo y sus coordenadas son perfectamente conocidas a lo largo del movimiento. Entonces, de la primera matriz, sólo se tendrá en cuenta la submatriz correspondiente a las filas y columnas 3 y 4, que es la parte que se refiere a las coordenadas del punto 1. En cuanto a la segunda matriz, se ensambla en su totalidad. La matriz de masas resulta ser finalmente,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right)m & 0 & \frac{1}{8}m & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right)m & 0 & \frac{1}{8}m \\ \frac{1}{8}m & 0 & \frac{3}{8}m & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}m & 0 & \frac{3}{8}m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{24}m & 0 & \frac{1}{8}m & 0 \\ 0 & \frac{25}{24}m & 0 & \frac{1}{8}m \\ \frac{1}{8}m & 0 & \frac{3}{8}m & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}m & 0 & \frac{3}{8}m \end{bmatrix} \quad (68)$$

Vamos ahora con el vector de fuerzas generalizadas. Se comienza obteniendo el de cada uno de los elementos.

La fuerza que actúa sobre el primer elemento es su peso, y el punto de aplicación es el centro de gravedad del elemento. Entonces, las constantes que se precisan para formar la matriz \mathbf{C}_P , valen,

$$L = 2r \quad ; \quad \bar{x}_p = r \quad ; \quad \bar{y}_p = r \quad (69)$$

Y el vector de fuerzas generalizadas del elemento,

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{C}_P^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} mg \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Téngase en cuenta que este vector contiene fuerzas sobre las variables, en este caso, fuerzas sobre los puntos 0 y 1 en las direcciones de los ejes generales, que son equivalentes a las fuerzas aplicadas, es decir, que dan lugar a la misma resultante y momento resultante en un punto cualquiera que las fuerzas aplicadas sobre el elemento, en este caso, el peso del propio elemento.

El segundo elemento también está sometido a su peso como única fuerza aplicada. Las constantes son, en este caso,

$$L = 2r \quad ; \quad \bar{x}_p = r \quad ; \quad \bar{y}_p = 0 \quad (71)$$

Y el vector de fuerzas generalizadas del elemento,

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{C}_P^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} mg \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (72)$$

En este caso resulta mucho más evidente la equivalencia entre el vector de fuerzas del elemento y la fuerza aplicada.

El ensamblaje de estos dos vectores para obtener el vector de fuerzas generalizadas de todo el mecanismo se realiza de la misma forma que se ha visto para la matriz de masas. Del primer vector se toman las componentes tres y cuatro y se introducen en las dos primeras posiciones del vector global. El segundo se ensambla tal cual.

$$\mathbf{Q} = -\frac{1}{2} mg \begin{Bmatrix} 1+0 \\ 1+1 \\ 0+0 \\ 0+1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} mg \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

De esta forma, queda explicado cómo obtener la matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas de un mecanismo en su conjunto, de manera que ya se dispone de todos los términos necesarios para formular las ecuaciones de la Dinámica indicadas en (7) y (8).

2.5 Consideración de actuadores, resortes y amortiguadores.

Por supuesto, la acción de estos dispositivos puede ser tenida en cuenta introduciendo, sobre los elementos a que se hallan unidos, las fuerzas o momentos correspondientes. Así, la figura 8a presenta un mecanismo genérico en el que dos elementos están conectados por un resorte lineal, mientras que la figura 8b muestra las fuerzas iguales y contrarias sobre los elementos a que da lugar el resorte, supuesto con deformación de alargamiento en ese instante. Conocida la posición de los puntos A y B, \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B , el valor de la fuerza \mathbf{f} es

$$\mathbf{f} = -k(d_{AB} - l_0) \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{d_{AB}} \quad (74)$$

donde d_{AB} es la distancia actual entre los puntos A y B, k es la constante elástica del resorte y l_0 su longitud natural. Caso de tratarse de un amortiguador

en lugar de un resorte, y llamando \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B a las velocidades de los puntos, la fuerza valdría,

$$\mathbf{f} = -c \left[(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)^T \frac{(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)}{d_{AB}} \right] \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{d_{AB}} \quad (75)$$

siendo c el amortiguamiento. Por último, si entre los puntos A y B se encontrara un actuador, la fuerza sería,

$$\mathbf{f} = a \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{d_{AB}} \quad (76)$$

donde a es el valor de la fuerza ejercida por el actuador, positivo si el actuador tiende a alargarse, y negativo si tiende a acortarse.

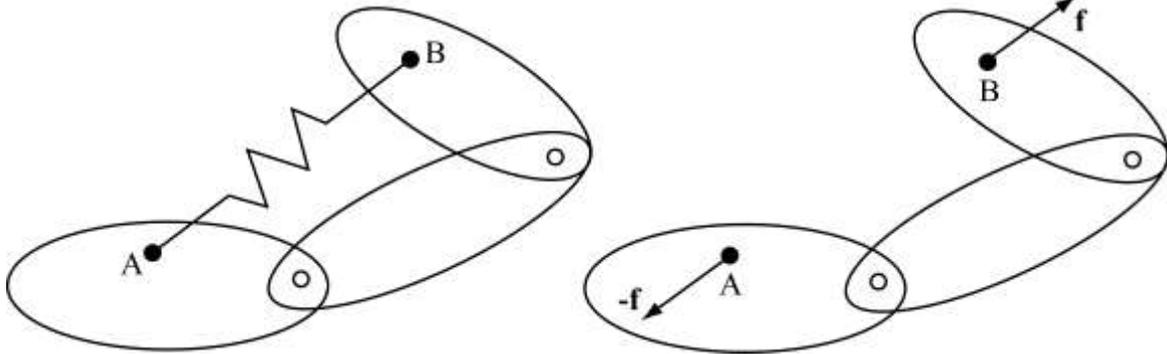


Figura 8a. Resorte lineal entre elementos. Figura 8b. Fuerzas equivalentes.

Como ya se indicó en el apartado dedicado a fuerzas puntuales sobre elementos, la introducción de cada fuerza de la figura 8b en el vector de fuerzas generalizadas será inmediata si el punto en el que se aplica es un punto básico de la modelización del mecanismo. De no ser así, deberá seguirse el procedimiento explicado con anterioridad.

Cabe sin embargo otra posibilidad, que consiste en la definición de una coordenada relativa de distancia entre los puntos A y B, tal y como se muestra en la figura 9.

En este caso, la consideración de la fuerza del resorte es mucho más sencilla e inmediata, ya que puede ser calculada simplemente como

$$f = -k(s - l_0) \quad (77)$$

y este escalar introducido directamente en la posición del vector de fuerzas generalizadas correspondiente a la coordenada relativa de distancia s . Nótese

que si el resorte está traccionado, el escalar f es negativo, lo que significa que se trata de una fuerza que tiende a reducir la distancia s , mientras que si el resorte se halla comprimido, f es positivo, ya que la fuerza hará aumentar el valor de la coordenada s .

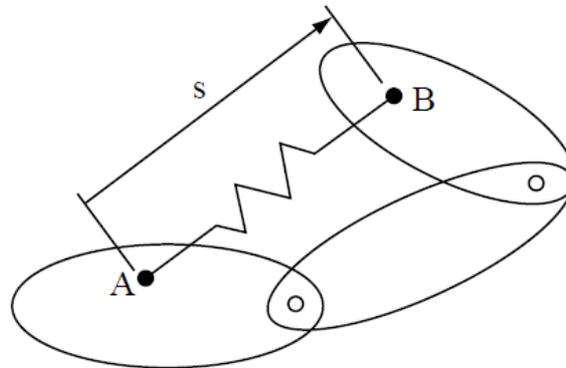


Figura 9. Coordenada de distancia asociada a un resorte lineal.

Este razonamiento es ampliable a los amortiguadores y actuadores lineales. Si se define una distancia asociada a ellos, la fuerza que ejercen será directamente introducida en la posición del vector de fuerzas generalizadas correspondiente a la distancia, siempre con el criterio visto: si la fuerza tiende a aumentar el valor de la distancia, es positiva, y, si tiende a reducirla, es negativa. Para un amortiguador,

$$f = -c\dot{s} \quad (78)$$

mientras que para un actuador,

$$f = a \quad (79)$$

En el caso de que el resorte, amortiguador o actuador sea de torsión se actuará de manera análoga, con la diferencia de que la coordenada relativa a añadir será un ángulo. El caso de un resorte de torsión se ilustra en la figura 10.

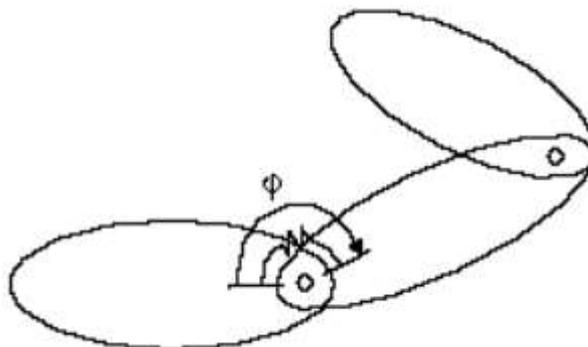


Figura 10. Coordenada de ángulo asociada a un resorte de torsión.

Ahora, en lugar de una fuerza, lo que habrá que introducir en la posición del vector de fuerzas generalizadas correspondiente a la coordenada de ángulo será un momento, de valor,

$$m = -k(\varphi - \varphi_0) \quad (80)$$

donde k es la rigidez del resorte, φ el valor actual del ángulo y φ_0 el valor del ángulo para el cual el resorte se halla sin tensión. Si en lugar de resorte hay un amortiguador, el momento es

$$m = -c\dot{\varphi} \quad (81)$$

donde c es el amortiguamiento. Por último, si se tiene un actuador,

$$m = a \quad (82)$$

siendo a el valor de la fuerza del actuador en el instante considerado, positivo si el actuador se alarga y negativo si se acorta.

Como ejemplo de aplicación de lo visto, supóngase que el péndulo doble presentado en el apartado anterior se modifica por la introducción de un resorte lineal entre los puntos 0 y 2, según se muestra en la figura 11.

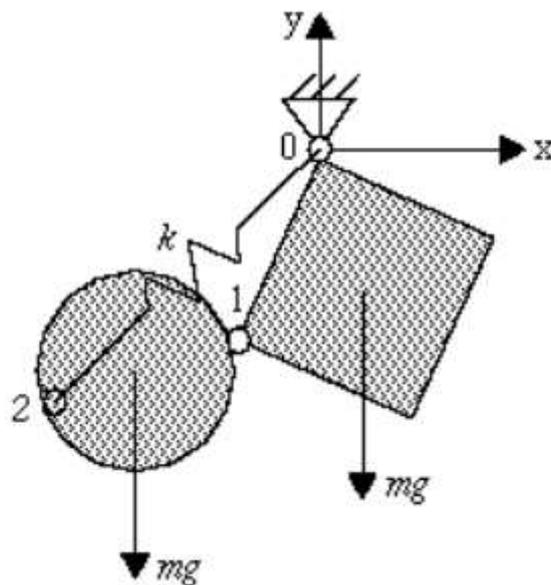


Figura 11. Péndulo doble con resorte lineal.

Entonces, si se añade como variable la distancia medida desde el punto 0 al punto 2, que se denominará s , quedando el vector de variables del mecanismo,

$$\mathbf{q}^T = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad s\} \quad (83)$$

se tendrá que el nuevo vector de fuerzas generalizadas resulta,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2}mg \\ -mg \\ 0 \\ -\frac{1}{2}mg \\ -k(s - l_0) \end{array} \right\} \quad (84)$$

En lo que respecta a la matriz de masas del mecanismo, la matriz dada por (68) se verá orlada por una quinta fila y una quinta columna de ceros, ya que la masa estaba repartida entre los puntos 1 y 2, y, por tanto, no hay inercia alguna que se asocie a la distancia s . En consecuencia, la matriz de masas resultante será positiva semidefinida. Ello no plantea problema alguno ya que la distancia se halla relacionada con el resto de variables mediante la ecuación de restricción correspondiente, según se explicó en el capítulo de modelización, de forma que la variación de la distancia s encuentra siempre una inercia que vencer.

3. Formulaciones dinámicas.

Ya se ha visto en el primer apartado de este capítulo que las ecuaciones de Lagrange en coordenadas dependientes conducen al sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas (DAE's),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{Q} \quad (85a)$$

$$\Phi = \mathbf{0} \quad (85b)$$

Sin embargo, la gran mayoría de integradores disponibles sirven para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE's). Por este motivo, se trata de convertir el sistema (85) en un sistema de este tipo. Existen diversas alternativas que se describen a continuación.

3.1 Lagrange estabilizado.

Para convertir el sistema (85) en ODE's se derivan dos veces las ecuaciones de restricción (85b),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{Q} \quad (86a)$$

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (86b)$$

Este sistema se escribe agrupado como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_q^T \\ \mathbf{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\mathbf{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

donde las incógnitas son las aceleraciones y los multiplicadores de Lagrange.

El sistema (87) es inestable, debido a que no se está imponiendo el cumplimiento de las ecuaciones de restricción sino de su segunda derivada,

$$\ddot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{0} \quad (88)$$

de manera que puede darse un incumplimiento de las restricciones que varíe linealmente con el tiempo,

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}t + \mathbf{B} \quad (89)$$

El resultado es que el sistema mecánico va descomponiéndose al violarse las restricciones de manera progresiva, y se obtiene una solución que diverge totalmente de la verdadera.

Para solucionar este problema, Baumgarte propuso estabilizar el sistema de ecuaciones diferenciales integrando, en lugar de (88),

$$\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad (90)$$

de forma que la solución sea armónica amortiguada, y la violación de las restricciones no se dispare. Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante es,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Phi}_q^T \\ \mathbf{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\dot{\mathbf{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} - 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} - \omega^2\mathbf{\Phi} \end{Bmatrix} \quad (91)$$

Los valores de los parámetros de Baumgarte suelen tomarse,

$$\xi = 1 \quad ; \quad \omega = 10 \quad (92)$$

Obsérvese la similitud de la ecuación (90) con la ecuación del movimiento de un sistema vibratorio de un grado de libertad. Los parámetros ξ y ω representan el amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema. De ahí que ξ se tome la

unidad, esto es, amortiguamiento crítico, que es el valor que proporciona una más rápida disipación de la energía del sistema.

3.2 Matriz R.

Otra forma de llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias partiendo del sistema (85), consiste en establecer la siguiente relación de velocidades,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \quad (93)$$

donde \mathbf{q} son todas las variables del mecanismo y \mathbf{z} son un conjunto de variables independientes, es decir, iguales en número a los grados de libertad.

Derivando la ecuación (93) se obtiene la relación entre aceleraciones,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \quad (94)$$

Entonces, sustituyendo la expresión (94) en la ecuación (85a) se tiene,

$$\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{Q} \quad (95)$$

Premultiplicando por la matriz \mathbf{R}^T y reordenando, queda,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + (\Phi_{\mathbf{q}} \mathbf{R})^T \lambda = \mathbf{R}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}) \quad (96)$$

Ahora bien, en la expresión (96), el producto $\Phi_{\mathbf{q}} \mathbf{R}$ es idénticamente nulo. En efecto, como ya se ha visto con anterioridad, el campo de velocidades del mecanismo viene dado por la expresión,

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (97)$$

Si se sustituyen las velocidades dependientes $\dot{\mathbf{q}}$ por las independientes $\dot{\mathbf{z}}$, merced a la relación (93), se tiene que,

$$\Phi_{\mathbf{q}} \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (98)$$

El vector $\dot{\mathbf{z}}$ está formado por las velocidades independientes, iguales en número a los grados de libertad del mecanismo, por lo que puede tomar un valor arbitrario. Por tanto, si el producto de (98) es nulo para cualquier valor del vector $\dot{\mathbf{z}}$, se concluye que $\Phi_{\mathbf{q}} \mathbf{R}$ ha de ser idénticamente nulo.

En consecuencia, la expresión (96) queda como,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}) \quad (99)$$

que podría compactarse en la forma,

$$\overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{Q}} \quad (100)$$

En esta nueva expresión de las ecuaciones dinámicas del mecanismo conviene observar varias cuestiones:

- a) En primer lugar, el tamaño del nuevo sistema es igual al número de grados de libertad del mecanismo, mucho menor que el tamaño del sistema al que se llegaba en el apartado anterior con Lagrange estabilizado, que era igual a la suma del número de coordenadas dependientes más el número de restricciones entre ellas. Por tanto, la formulación dinámica mediante la matriz \mathbf{R} conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de tamaño muy reducido, lo que supone una ventaja sobre Lagrange estabilizado. Sin embargo, hace preciso calcular la matriz \mathbf{R} en cada instante, lo que supone una desventaja. Más adelante se explicará cómo calcular dicha matriz.
- b) En segundo lugar, se ve cómo en el vector de fuerzas generalizadas aparece un término que contiene velocidades, representando como siempre fuerzas centrífugas y de Coriolis.
- c) Por último, hay que señalar que, al ser las incógnitas solamente las aceleraciones independientes, su integración proporcionará las velocidades y posiciones también independientes. Sin embargo, para construir el sistema de ecuaciones (100) es preciso conocer todas las posiciones y velocidades del mecanismo. En consecuencia, al aplicar esta formulación, será necesario resolver los problemas de posición y velocidad del mecanismo en cada instante, lo que supone una nueva desventaja frente al método de Lagrange estabilizado.

Para completar la explicación de esta formulación, resta indicar el modo de obtener la matriz \mathbf{R} en cada instante. Para ello, se retorna a la expresión (93), que relaciona las velocidades dependientes e independientes. Si se suponen unas velocidades independientes $\dot{z}_i = 1$ y $\dot{z}_j = 1$ para cualquier $j \neq i$, la expresión (93) adquiere la forma,

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_i \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1i} & \dots & R_{1f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{i1} & \dots & R_{ii} & \dots & R_{if} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & \dots & R_{ni} & \dots & R_{nf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (101)$$

donde n es el número de coordenadas dependientes y f el número de coordenadas independientes o grados de libertad del mecanismo.

Entonces, puede comprobarse que la columna i de la matriz \mathbf{R} no es otra cosa que el campo de velocidades del mecanismo correspondiente a un valor unitario de la velocidad independiente i , y nulo del resto de velocidades independientes. Por tanto, para calcular la matriz \mathbf{R} en un instante cualquiera, será preciso efectuar f análisis de velocidades del mecanismo, uno por cada columna de la matriz. Si dichos análisis se llevan a cabo por el procedimiento visto en el capítulo de Cinemática, esto es, resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (102)$$

será suficiente con triangularizar una vez la matriz del sistema y realizar f reducciones hacia delante y vueltas atrás, ya que sólo cambiará cada vez el término independiente.

Existe otro término que es preciso calcular cuando se aplica esta formulación: se trata del producto $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$. En efecto, si fijamos nuestra atención en la ecuación (99), podemos observar la presencia de dicho término en la parte derecha de la misma. Resulta más eficiente y sencillo calcular el producto de una vez, que obtener la derivada de la matriz \mathbf{R} y multiplicarla después por las velocidades independientes. Veamos cómo calcularlo.

Si se regresa a la expresión (94), que se reescribe aquí para mayor comodidad,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \quad (103)$$

se observa que el producto $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ no es otra cosa que las aceleraciones del mecanismo cuando todas las aceleraciones independientes $\ddot{\mathbf{z}}$ son nulas. Por lo tanto, para obtener este término, bastará con efectuar un análisis de aceleraciones con valor nulo de todas las entradas. Si este análisis se lleva a cabo según lo visto en el capítulo de Cinemática,

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (104)$$

se podrá utilizar la matriz del sistema ya triangularizada para el cálculo de la matriz \mathbf{R} , ya que, de nuevo, sólo cambia el término independiente.

3.3 Penalizadores.

Se ha visto al presentar la formulación de Lagrange estabilizada que el tamaño del sistema era $n+m$, siendo n el número de variables del problema y m el número de ecuaciones de restricción entre las variables. Semejante tamaño era debido a que, a las incógnitas del movimiento del sistema, \mathbf{q} , se añadían los multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}$, por lo que se hacía preciso resolver las ecuaciones cinemáticas juntamente con las dinámicas.

El método de los penalizadores va a evitar aumentar el número de incógnitas, de manera que sea suficiente con resolver las ecuaciones dinámicas. Para explicarlo, se parte de las ecuaciones de Lagrange vistas con anterioridad en (85a),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (105)$$

El segundo sumando de la parte izquierda de la igualdad contiene a los multiplicadores de Lagrange. Los multiplicadores son las fuerzas que han de actuar en el sistema para que las ecuaciones de restricción que ligan las variables se cumplan en todo instante. Son las reacciones que producen las restricciones y, por lo tanto, incógnitas.

El método de los penalizadores surge al hacer que el valor de esas fuerzas, de esos multiplicadores, sea proporcional a la violación de las restricciones y sus derivadas.

$$\boldsymbol{\lambda} = \alpha \left(\ddot{\boldsymbol{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \omega^2\boldsymbol{\Phi} \right) \quad (106)$$

El parámetro α recibe el nombre de penalizador, y es el factor de proporcionalidad. Su valor suele tomarse 10^6 ó 10^7 . A los otros dos parámetros que aparecen en la expresión (106) se les dan usualmente los valores $\xi = 1$, $\omega = 10$. Nótese que el aspecto del interior del paréntesis es el de la ecuación de un sistema vibratorio de un grado de libertad. Se ha elegido un amortiguamiento crítico, valor que produce la más rápida disipación de la energía del sistema.

Para una mejor comprensión del sentido físico de esta aproximación, veamos el siguiente ejemplo. Supóngase un péndulo simple de longitud l y masa m concentrada en el extremo, modelizado con un punto fijo, p_0 , y otro móvil, p_1 , según se muestra en la figura 12.

Las fuerzas que actúan sobre el punto 1 en la dirección del péndulo son la fuerza de inercia centrífuga (se ha supuesto una velocidad angular del péndulo Ω en ese instante) y la correspondiente componente del peso. Ambas fuerzas tratan de separar el punto 1 del punto fijo, es decir, tratan de violar la ecuación

de restricción de distancia constante que existe entre los puntos 0 y 1. Caso de estar empleándose multiplicadores de Lagrange, éstos tomarán el valor preciso para equilibrar a las fuerzas antes mencionadas que tratan de modificar la distancia constante l . Es decir, los multiplicadores representan la reacción de la barra.

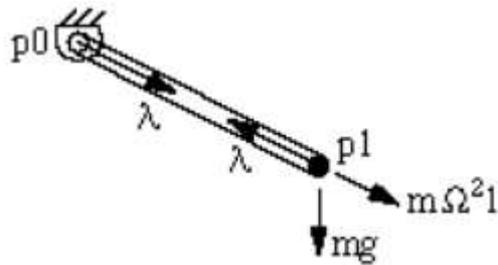


Figura 12. Sentido físico de los multiplicadores de Lagrange.

Sin embargo, si se utilizan penalizadores, la representación podría ser la que se muestra en la figura 13,

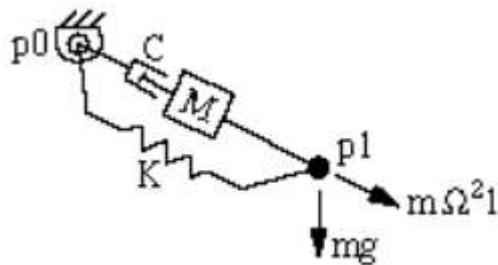


Figura 13. Sentido físico de los penalizadores.

Como se ve, los penalizadores equivalen a introducir un muelle de gran rigidez, un amortiguador de elevada constante y una masa de gran inercia. Por ello el penalizador α toma un valor tan alto. De esta forma, las fuerzas que tratan de variar la distancia que ha de mantenerse constante encuentran una fuerte oposición. Aunque las fuerzas desestabilizantes de la restricción sean grandes, sólo lograrán una pequeña oscilación de la distancia l alrededor de su valor nominal.

Visto el sentido físico del método de los penalizadores, se comprenderá la importancia de seleccionar un valor adecuado del penalizador: Un valor muy pequeño dará lugar a enormes variaciones de la restricción (en el ejemplo, variaciones excesivas de la longitud l), que son inadmisibles; un valor excesivamente grande producirá problemas de mal condicionamiento numérico. Los valores adecuados de α son los que se han recomendado con anterioridad.

Introduciendo la ecuación (106) en las ecuaciones dinámicas dadas por (105), se obtiene la siguiente expresión,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha (\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi}) = \mathbf{Q} \quad (107)$$

Sustituyendo las derivadas de las ecuaciones de restricción por sus expresiones, bien conocidas ya de la Cinemática, y reagrupando términos resulta, finalmente,

$$(\mathbf{M} + \alpha\mathbf{\Phi}_q^T\mathbf{\Phi}_q)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \alpha\mathbf{\Phi}_q^T(\dot{\mathbf{\Phi}}_q\dot{\mathbf{q}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi}) \quad (108)$$

que son las ecuaciones dinámicas por el método de los penalizadores.

Por tanto, con esta formulación se llega a un sistema de sólo n ecuaciones frente a las $n+m$ de Lagrange estabilizado. Además, si se comparan las matrices de ambos sistemas, resulta que la matriz de los penalizadores tiene un comportamiento mucho más robusto frente a posiciones singulares, ecuaciones redundantes y cambios de configuración, pues es siempre positivo-definida, cosa que no ocurre con la matriz de Lagrange estabilizado.

3.4 Lagrange aumentado.

Se trata de una combinación de los métodos de Lagrange estabilizado y penalizadores, buscando las ventajas de ambos. En efecto, aunque según se ha visto, el método de los penalizadores es superior al de Lagrange estabilizado por conducir a un sistema de ecuaciones de tamaño mucho menor y más robusto numéricamente, es obvio que se ha obtenido merced a una aproximación. El método de Lagrange aumentado pretende calcular el valor exacto de los multiplicadores, pero evitando resolver el sistema de tamaño $m+n$. Para ello se escribe la siguiente expresión,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha (\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi}) = \mathbf{Q} \quad (109)$$

Si se compara la ecuación (109) con la (105), esto es, con las auténticas ecuaciones dinámicas del mecanismo, se deduce que los multiplicadores de Lagrange valen,

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^* + \alpha (\ddot{\mathbf{\Phi}} + 2\xi\omega\dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2\mathbf{\Phi}) \quad (110)$$

Entonces, se recurre al siguiente procedimiento iterativo. Se comienza tomando un valor tentativo de los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}_0$ (después se recomendarán algunas

opciones para esta elección), y se resuelven sucesivamente las ecuaciones (109) y (110) en la forma,

$$\left(\mathbf{M} + \alpha \Phi_{\mathbf{q}}^T \Phi_{\mathbf{q}}\right) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \Phi_{\mathbf{q}}^T \left[\lambda_i + \alpha \left(\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\xi \omega \dot{\Phi} + \omega^2 \Phi \right) \right] \quad (111a)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \alpha \left(\ddot{\Phi} + 2\xi \omega \dot{\Phi} + \omega^2 \Phi \right) \quad (111b)$$

Es decir, con un valor de los multiplicadores se calculan unas aceleraciones en la ecuación (111a), que permiten obtener unos multiplicadores mejorados en la (111b). Se vuelve con ellos a la (111a) y así hasta que apenas haya variación de unos resultados a los siguientes. En general, bastan dos o tres iteraciones para lograr la convergencia. Respecto al valor inicial de los multiplicadores para comenzar a iterar, puede utilizarse $\lambda_0 = 0$, o bien el valor que tenían en el paso de tiempo anterior.

Esta técnica requiere por tanto resolver varias veces un sistema de n ecuaciones. Sin embargo, la matriz del sistema se mantiene la misma durante el proceso iterativo, con lo que sólo ha de triangularizarse una vez y efectuar luego una marcha adelante y vuelta atrás por cada iteración. De esta forma, con un pequeño esfuerzo adicional de cálculo respecto al método de los penalizadores, se resuelven las ecuaciones con exactitud y se obtiene el valor de los multiplicadores. Si, como se verá más adelante, esta formulación se combina con un integrador implícito, que también obliga a iterar, en cada nueva iteración se habrán modificado posiciones y velocidades además de aceleraciones. Además, en este caso, el uso del método de Lagrange aumentado no implica esfuerzo de cálculo adicional alguno, ya que se aprovecha cada iteración del integrador para ir actualizando los multiplicadores.

4. Integración numérica.

No se pretende aquí recoger un tratado sobre integración numérica, que podrá encontrarse en numerosos libros monográficos sobre el tema, pero sí mostrar algunos conceptos básicos que permitan al lector dirigirse a uno de esos libros especializados, a la vez que explicar la problemática concreta que se presenta en la integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales a que da lugar la dinámica de mecanismos.

Ya se ha visto en el apartado anterior que la dinámica de un mecanismo se plasma en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (en inglés, ODE's). En el caso de utilizar coordenadas dependientes, se vio que el sistema que surgía inicialmente era de ecuaciones diferenciales-algebraicas (en inglés, DAE's), pero dicho sistema podía ser convertido a otro de ODE's equivalente. Por lo tanto, en este apartado nos centraremos en las técnicas numéricas para integrar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La forma genérica de un sistema de ODE's es,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (112)$$

donde t es el tiempo, \mathbf{y} es el vector de variables e $\dot{\mathbf{y}}$ es el vector de derivadas. Es decir, se trata de una serie de ecuaciones \mathbf{f} que nos proporcionan el valor de las derivadas de un conjunto de variables en un cierto instante de tiempo. Ahora bien, como habrá observado el lector, este sistema es de primer orden, ya que sólo aparecen las derivadas primeras de las variables. Es para este tipo de sistemas, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para los que se han desarrollado una gran variedad de integradores numéricos.

Sin embargo, los sistemas de ODE's que resultan en la dinámica de mecanismos son, según se ha visto, de segundo orden, ya que en ellos aparecen también las derivadas segundas de las variables. Para adaptarse a la estructura de la ecuación (112) y disponer así de la variedad de integradores comentada, es suficiente recurrir a un pequeño subterfugio matemático. En los sistemas que habremos de integrar, si se llama \mathbf{q} al vector de variables, aplicaremos la siguiente conversión,

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (113)$$

Entonces, la ecuación (112) representa en nuestro caso a las ecuaciones dinámicas. En un instante determinado t , se conoce el vector de variables \mathbf{y} , que contiene a posiciones y velocidades, y las ecuaciones dinámicas nos proporcionan las correspondientes aceleraciones, con lo que ya se tiene el vector de derivadas $\dot{\mathbf{y}}$ (nótese que las velocidades simplemente se copian del vector \mathbf{y} al $\dot{\mathbf{y}}$). Este planteamiento es válido tanto si en la modelización del mecanismo se emplean variables dependientes como independientes.

4.1 Estabilidad y precisión.

Las dos propiedades esenciales de un integrador numérico son estabilidad y precisión. En este apartado se va a explicar en qué consisten, de manera que el lector pueda realizar una buena selección del integrador en función de las características de su sistema dinámico.

La estabilidad significa la capacidad de converger que tiene el integrador para distintos tamaños del paso de tiempo. Se dice que el integrador converge cuando proporciona una solución, aunque no sea la correcta, en cada nuevo paso de tiempo. Si la solución se dispara hacia el infinito o no es capaz de

proporcionar solución alguna se dice que el integrador diverge. En general, dado un sistema dinámico, un integrador convergerá o no dependiendo del tamaño del paso de tiempo que se escoja. Entonces, se dice que el integrador es condicionalmente estable, y converge si

$$\Delta t \leq \frac{T}{factor} \quad (114)$$

donde T es el menor periodo de la solución. Sin embargo, existen integradores que convergen siempre, sea cual sea el tamaño de paso que se elija. Dichos integradores se denominan incondicionalmente estables.

La precisión hace referencia a la mayor o menor exactitud de la solución. Se distingue el error local, error cometido por el integrador al dar un paso, y el error global, que es el que se va acumulando al progresar la integración. Se dice que un determinado integrador es de n^o orden cuando su error global es proporcional a Δt^n . El error global es siempre un orden menor que el error local. El error que introduce un integrador en la solución tiene dos manifestaciones: reducción de amplitud y alargamiento del periodo. La reducción de amplitud no suele afectar a todas las frecuencias por igual, lo que hace que en ocasiones este error pueda ser deseable al realizar una función de filtrado de las frecuencias que no interesen de la solución. Para obtener una solución de precisión aceptable hasta el periodo T_i suele recomendarse tomar un paso de tiempo,

$$\Delta t = \frac{T_i}{10 \div 20} \quad (115)$$

A partir de lo visto, un integrador se denomina *A-estable* cuando es incondicionalmente estable y conserva la amplitud, se denomina *L-estable* cuando cuando es incondicionalmente estable pero introduce amortiguamiento, es decir, filtra algunas frecuencias, y se denomina *B-estable* cuando es incondicionalmente estable, conserva la amplitud y es además simpléctico (conserva el momento angular). Como ejemplos tenemos la regla trapezoidal (A-estable), el método de Hilbert, Hughes y Taylor (L-estable), y la regla del punto medio (B-estable).

4.2 Clasificación de los integradores.

Todos los métodos mencionados en el párrafo anterior pertenecen a los llamados de *single step* (de paso simple). Quiere esto decir que proporcionan la solución en el paso $n+1$ haciendo uso de la solución en el paso n , pero no precisan de valores de la solución en instantes anteriores. Los métodos que sí

aprovechan las soluciones en instantes previos se denominan *multistep* (de paso múltiple). Lógicamente, estos métodos necesitan de otros para iniciar la integración, ya que al comienzo no existen valores de soluciones en instantes previos. Se dice entonces que estos métodos no son *self-starting*, es decir, no pueden comenzar por sí mismos, frente a los de paso simple que sí lo son. Los métodos de paso simple son en general más aptos para integraciones difíciles, con soluciones de frecuencias altas (rigideces elevadas) o discontinuidades (impactos y cambios de configuración), mientras que los de paso múltiple resultan muy eficientes (muy rápidos) en integraciones fáciles, de solución suave.

También se distinguen métodos de paso fijo y de paso variable. En los primeros, el tamaño de paso es el mismo a lo largo de toda la integración. En los segundos, el tamaño de paso se aumenta cuando la integración es fácil, y se reduce cuando se torna complicada. De esta forma se logra una mayor velocidad de integración. Los criterios que gobiernan la estrategia de variación del tamaño de paso han sido tradicionalmente matemáticos, si bien recientes trabajos han mostrado que pueden ser preferibles criterios físicos, basados en el comportamiento del sistema mecánico en estudio.

Además, existen métodos de integración explícitos e implícitos. Explícitos son aquéllos que proporcionan la solución en el instante $n+1$ como función explícita de valores de la solución y su derivada en instantes anteriores. Por contra, los implícitos presentan la solución en $n+1$ en función de valores de la solución y su derivada en instantes previos, pero también en el propio instante $n+1$, lo que obliga a resolver un sistema de ecuaciones no lineal para cada paso de integración. Los explícitos requieren un menor esfuerzo de cálculo, al no precisar resolver un sistema de ecuaciones no lineal en cada paso, pero nunca son incondicionalmente estables, lo que puede conllevar la necesidad de establecer un paso de tiempo muy pequeño cuando la solución posea frecuencias elevadas (fuertes rigideces).

Se ha dicho en el párrafo anterior que los métodos implícitos conducen a un sistema de ecuaciones no lineal, que ha de resolverse en cada nuevo paso de integración. Pues bien, dicho sistema se resuelve de modo iterativo, y caben dos posibilidades. La primera consiste en emplear la técnica de punto fijo, en la que se comienza calculando una estimación de la solución mediante un integrador explícito (*predictor*), y posteriormente se evalúa la función y se aplica el propio integrador implícito (*corrector*) hasta que la solución estimada coincide con la obtenida. La segunda opción es utilizar la técnica de Newton-Raphson, que también aplica la secuencia predictor-corrector, pero se vale de una matriz tangente o quasi-tangente para llegar a la solución. Para poder aplicar esta técnica es preciso combinar analíticamente el integrador con las ecuaciones dinámicas, de manera que se obtenga una expresión en la que sólo aparezcan las

posiciones, las velocidades o las aceleraciones en el instante $n+1$. Así es posible deducir una matriz tangente o quasi-tangente para el proceso iterativo.

4.3 Algunos integradores.

Como ejemplo se muestran a continuación algunos integradores habitualmente utilizados para la resolución de la dinámica de sistemas multicuerpo. Otros muchos pueden encontrarse en libros especializados sobre el tema.

4.3.1 La regla trapezoidal.

Se trata de un integrador implícito de paso simple que, como ya se ha mencionado en el apartado anterior, es A-estable, y cuya implementación resulta muy sencilla. Se muestra muy apropiado para problemas difíciles, con rigideces elevadas, impactos o cambios de configuración. Su esquema es el siguiente,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{y}}_n + \dot{\mathbf{y}}_{n+1}) \quad (116)$$

Si se expande esta expresión teniendo en cuenta el contenido del vector \mathbf{y} y en la dinámica de sistemas multicuerpo, se tiene,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{q}}_n + \dot{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (117a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (117b)$$

Se dice que las variables primarias de la integración son, por ejemplo, las aceleraciones, si la expresión del integrador proporciona posiciones y velocidades en el instante $n+1$ en función de las aceleraciones en el mismo instante. Para conseguirlo, se manipulan las expresiones (117) y se llega a,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (118a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}) \quad (118b)$$

Las ecuaciones (118) son aptas para la resolución mediante la iteración de punto fijo del sistema de ecuaciones no lineales que todo integrador implícito conlleva. Sin embargo, dado que se precisará de una estimación inicial de la solución en cada paso, se muestran a continuación las ecuaciones que pueden servir de predictor,

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (119a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (119b)$$

4.3.2 Runge-Kutta explícito de segundo orden.

Como ya dice el título, se trata de un integrador explícito de paso simple. El orden coincide con el número de evaluaciones de función (resoluciones del sistema de ecuaciones dinámicas) que son necesarias para avanzar un paso de tiempo. Su utilización es muy sencilla porque al ser explícito no conlleva un proceso iterativo. Como ya se comentó, tiene la contrapartida de no ser incondicionalmente estable, por lo que se empleará principalmente en problemas que no presenten rigideces elevadas. Su formulación es la siguiente,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{y}}_1 + \dot{\mathbf{y}}_2) \quad (120a)$$

siendo,

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t) \quad (120b)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_1 \Delta t, t + \Delta t) \quad (120c)$$

La notación \mathbf{f} (vector de variables, tiempo) ya ha sido explicada al comienzo del apartado. Las ecuaciones (120b) y (120c) corresponden a las dos evaluaciones de función requeridas para completar un paso de integración.

4.3.3 Adams-Bashforth de cuarto orden.

Es un integrador explícito de paso múltiple. Al ser de cuarto orden necesita conocer la solución en el paso presente y los tres anteriores. Por consiguiente, es preciso utilizar otro integrador de paso simple para dar los primeros tres pasos desde el instante inicial. Se puede utilizar en problemas sencillos, sin cambios bruscos en la solución. El esquema del integrador es,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{24}(55\dot{\mathbf{y}}_n - 59\dot{\mathbf{y}}_{n-1} + 37\dot{\mathbf{y}}_{n-2} - 9\dot{\mathbf{y}}_{n-3}) \quad (121)$$

4.3.4 Adams-Moulton de cuarto orden.

Es éste un integrador implícito de paso múltiple. Es adecuado siempre y cuando no haya cambios de configuración o impactos, que obliguen a reiniciar la integración, ya que, al ser de paso múltiple, le resulta costoso arrancar (y precisa para ello de otro integrador de paso simple que le ayude). Su expresión es de la forma,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{24}(9\dot{\mathbf{y}}_{n+1} + 19\dot{\mathbf{y}}_n - 5\dot{\mathbf{y}}_{n-1} + \dot{\mathbf{y}}_{n-2}) \quad (122)$$

Por ser implícito, precisa de un predictor que le proporcione la primera estimación de la solución en el paso siguiente. Para ello se suele utilizar el método explícito de Adams-Bashforth anteriormente descrito.

4.4 Algoritmos de integración.

En este apartado se pretende mostrar la forma en que se combinan las ecuaciones de la dinámica con los integradores, para dar como resultado la simulación dinámica de un determinado mecanismo.

Se mostrarán los algoritmos del procedimiento de integración de distintas combinaciones de ecuaciones dinámicas e integradores. A partir de ellas, el lector podrá deducir fácilmente los algoritmos correspondientes a otras combinaciones diferentes.

4.4.1 Penalizadores + regla trapezoidal.

Es ésta una opción bastante común y práctica. El correspondiente algoritmo adopta la secuencia siguiente,

- 1- Se conocen las posiciones \mathbf{q}_n , velocidades $\dot{\mathbf{q}}_n$ y aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_n$ en un instante t . Si se trata del instante inicial, las aceleraciones habrán de obtenerse en función de posiciones y velocidades mediante la resolución del sistema de ecuaciones dinámicas (108).
- 2- Se obtiene una estimación (predictor) de los valores de posiciones \mathbf{q}_{n+1} y velocidades $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ en el instante siguiente, $t+\Delta t$, mediante las expresiones (119).
- 3- Se evalúan la matriz y el término independiente del sistema de ecuaciones dinámicas (108), utilizando los valores de posiciones y velocidades obtenidas en el paso 2 ó 5 (dependiendo de que sea la primera vez tras el predictor o no).
- 4- Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales (108), dando como solución las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ en el instante $t+\Delta t$.

5- Se recalculan las posiciones \mathbf{q}_{n+1} y velocidades $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ en el instante $t+\Delta t$ a partir de las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ obtenidas en el paso 4, merced a las expresiones (118).

6- Se evalúa la diferencia entre la nueva solución y la previa (después se explicará cómo). Si dicha diferencia es inferior a una tolerancia especificada (por ejemplo, 10^{-5}), la nueva solución se da por válida y se vuelve al punto 1. En caso contrario, se retorna al punto 3.

La evaluación de la diferencia entre la solución nueva y la antigua se realiza como sigue. Si se llama \mathbf{q}_{n+1}^1 al vector de posición nuevo y \mathbf{q}_{n+1}^0 al obtenido en la iteración previa, la diferencia entre ambos se toma,

$$e = \sqrt{\sum (\mathbf{q}_{n+1}^1 - \mathbf{q}_{n+1}^0)^2} \quad (123)$$

donde el sumatorio se extiende a todas las componentes del vector \mathbf{q} , habiéndose omitido los subíndices para no recargar más la expresión.

El algoritmo es también válido si se utilizan las ecuaciones dinámicas que proporciona el método de Lagrange estabilizado. Basta emplear el sistema de ecuaciones (91) en lugar del (108). En este caso se obtienen, además del movimiento, los valores de los multiplicadores de Lagrange a lo largo del tiempo, que están relacionados con las reacciones.

Como ejemplo de aplicación del algoritmo presentado, se va a realizar la simulación dinámica del péndulo doble descrito en el apartado 2.4, cuya representación se muestra en la figura 6, y cuya matriz de masas y vector de fuerzas generalizadas responden a las expresiones dadas por (79) y (84) respectivamente.

La simulación consistirá en calcular el movimiento del sistema durante diez segundos, suponiendo que el péndulo doble parte del reposo, con los puntos 0, 1 y 2 alineados horizontalmente sobre el eje x positivo, según puede apreciarse en la figura 14. Se tomará $m=1$, $r=1$.

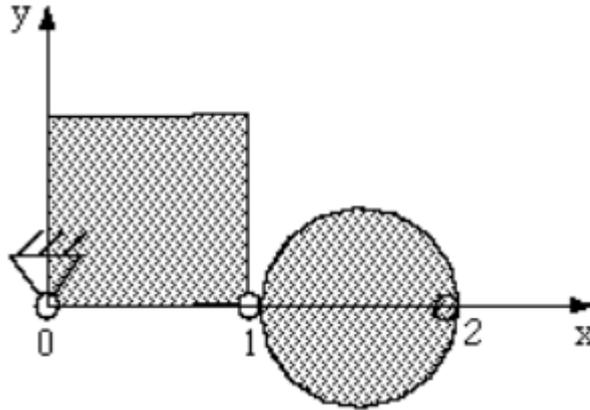


Figura 14. Posición inicial del péndulo doble.

Si se emplean en la modelización del mecanismo las coordenadas x e y de los puntos 1 y 2, el número de variables es cuatro. Como los grados de libertad son dos, habrá dos ecuaciones de restricción, correspondientes a las condiciones de distancia constante que aseguran el carácter rígido de ambos sólidos. Dichas ecuaciones son,

$$x_1^2 + y_1^2 - 2^2 = 0 \quad (124)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2^2 = 0 \quad (125)$$

Las ecuaciones dinámicas que proporciona el método de los penalizadores se reescriben aquí para mayor comodidad del lector.

$$(\mathbf{M} + \alpha \mathbf{\Phi}_q^T \mathbf{\Phi}_q) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{\Phi}_q^T (\dot{\mathbf{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} + 2\xi \omega \dot{\mathbf{\Phi}} + \omega^2 \mathbf{\Phi}) \quad (126)$$

A continuación se muestran los valores de los distintos términos que aparecen en la ecuación (126). Se considera que el vector de variables dependientes es,

$$\mathbf{q}^T = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2\} \quad (127)$$

Como valores de los parámetros pueden tomarse $\alpha=10^7$, $\xi=1$, $\omega=10$. La matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas se obtienen de (79) y (84) respectivamente, sin más que sustituir el valor de $m=1$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{25}{24} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{g}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (129)$$

En cuanto a los términos relacionados con las restricciones, son los siguientes,

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 - 4 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 4 \end{array} \right\} \quad (130)$$

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \end{bmatrix} \quad (131)$$

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{l} 2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2] \end{array} \right\} \quad (132)$$

$$\dot{\Phi} = \Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (133)$$

Ya se está por tanto en condiciones de aplicar el algoritmo visto. Los valores iniciales de posiciones y velocidades son,

$$\mathbf{q}^T = \{2 \quad 0 \quad 4 \quad 0\} \quad (134)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (135)$$

La integración se realiza con un paso de tiempo de 10^{-3} segundos y con una tolerancia para la convergencia del integrador de 10^{-5} . Como resultado de la simulación, la figura 15 muestra la historia de la coordenada y del punto 2 con respecto al tiempo.

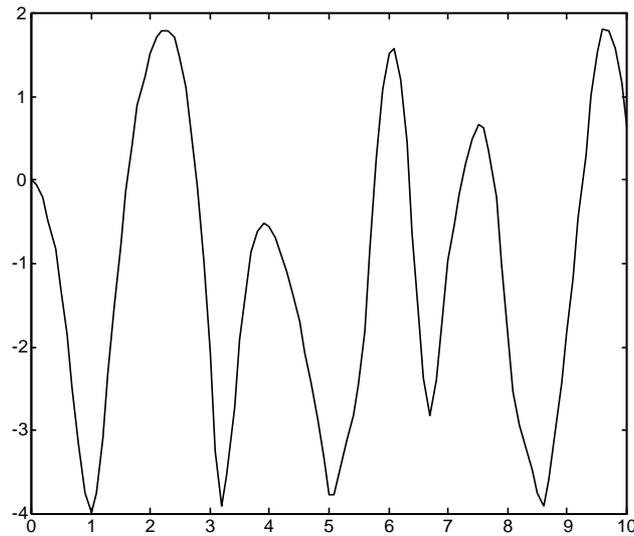


Figura 15. Historia de la coordenada vertical del extremo del péndulo doble con regla trapezoidal y penalizadores.

El sistema visto está sometido tan sólo a la acción de la gravedad. Es, por tanto, conservativo, lo que quiere decir que su energía mecánica total, suma de cinética y potencial, debe mantenerse constante a lo largo de la integración. La figura 16 muestra el valor de la energía obtenido durante los diez segundos de simulación dinámica.

Como puede observarse en la figura 16, la energía no se conserva exactamente, lo que significa que se está cometiendo un cierto error en la integración de las ecuaciones dinámicas. El error es inevitable en todo procedimiento numérico. Un método de resolución será tanto mejor cuanto menor sea el error cometido. En sistemas conservativos, un buen indicador del error es la energía del sistema: cuanto mejor se conserve durante el proceso de integración, más exacto será el resultado obtenido. En base a lo dicho, el resultado que muestra la figura 16 puede calificarse de muy bueno, ya que el máximo error en la energía se encuentra por debajo de 0.002, en un sistema cuya energía potencial máxima en valor absoluto (por tomar un valor de referencia) es 39.24.

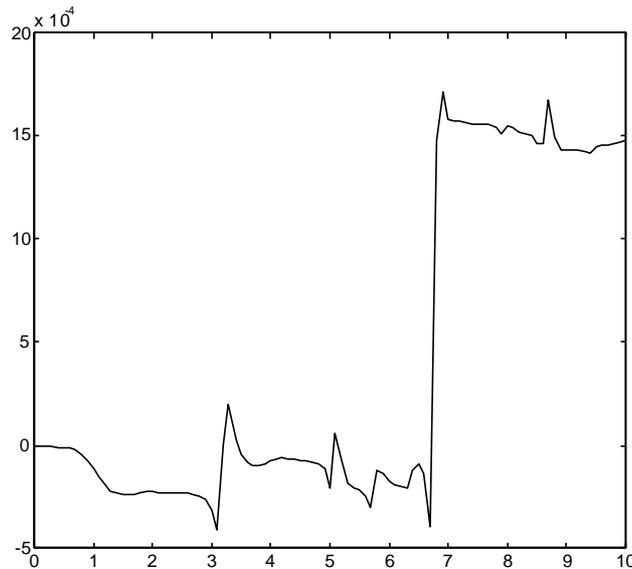


Figura 16. Historia de la energía del péndulo doble con regla trapezoidal y penalizadores.

Otro buen indicador de la calidad de los resultados conseguidos es la violación de las ecuaciones de restricción. En efecto, el cumplimiento de las restricciones implica que éstas tomen valor nulo. La figura 17 muestra el valor de las restricciones del péndulo doble simulado.

Se observa en la figura 17 que las restricciones se mantienen en unos valores muy pequeños y con ley de variación oscilatoria. Dado que las dos restricciones son de distancia constante, su violación expresa la variación de distancia (al cuadrado) entre los puntos utilizados como variables. Puede decirse, por tanto, que los resultados son buenos. Los picos más acusados corresponden a los instantes en que las fuerzas que tienden a separar los puntos que definen cada elemento son mayores, lo que en un lenguaje coloquial podríamos denominar latigazos del péndulo.

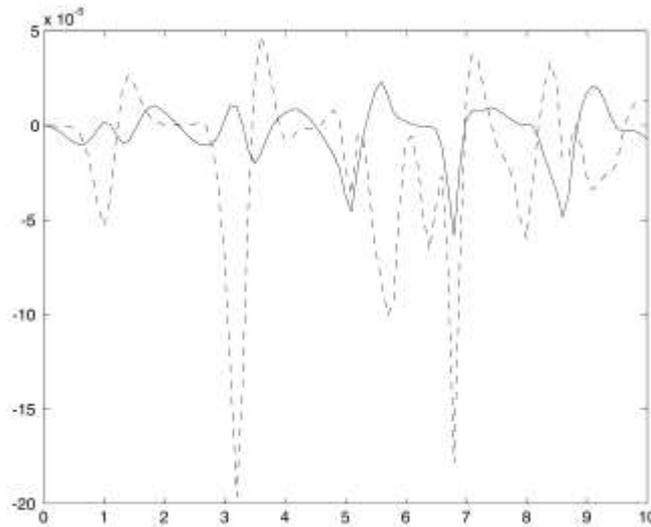


Figura 17. Violación de las restricciones del péndulo doble con regla trapezoidal y penalizadores.

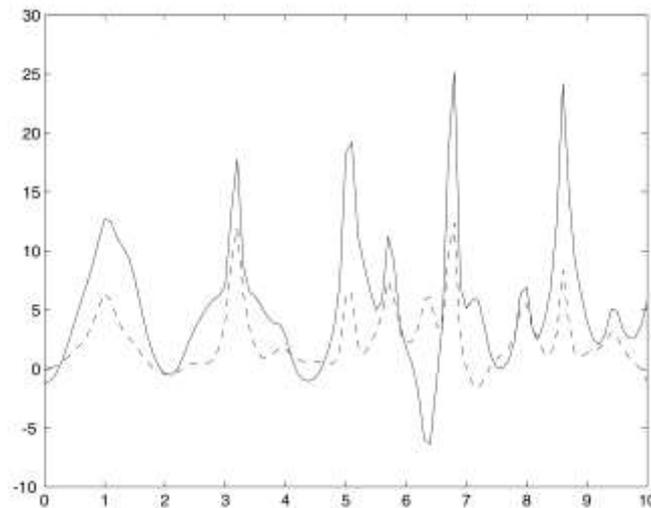


Figura 18. Multiplicadores de Lagrange del péndulo doble con regla trapezoidal y penalizadores.

Para terminar con los resultados de esta simulación, se muestra en la figura 18 el valor de los multiplicadores de Lagrange a lo largo del tiempo, obtenidos mediante la ecuación (106). En este ejemplo, por tratarse de dos ecuaciones de restricción de distancia constante, los multiplicadores dan una medida de la fuerza que tiende a alejar (o a acercar, si son negativos) los dos puntos entre los que se ha establecido la restricción correspondiente. Pueden apreciarse aquí también los instantes en que el péndulo da latigazos.

4.4.2 Lagrange aumentado + regla trapezoidal.

El esquema de Lagrange aumentado se combina muy bien con un integrador de tipo implícito, ya que aprovecha el proceso iterativo que requiere el integrador para mejorar los multiplicadores. El algoritmo se muestra a continuación.

1- Se conocen las posiciones \mathbf{q}_n , velocidades $\dot{\mathbf{q}}_n$, aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_n$ y multiplicadores λ_n en un instante t . Si se trata del instante inicial, las aceleraciones y los multiplicadores habrán de obtenerse en función de posiciones y velocidades mediante la resolución iterativa del sistema de ecuaciones dinámicas (111a) y las relaciones (111b). Como aproximación inicial de los multiplicadores puede tomarse el valor nulo para todos ellos.

2- Se obtiene una estimación (predictor) de los valores de posiciones \mathbf{q}_{n+1} y velocidades $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ en el instante siguiente, $t+\Delta t$, mediante las expresiones (119).

3- Se evalúan la matriz y el término independiente del sistema de ecuaciones dinámicas (111a), utilizando los valores de posiciones y velocidades obtenidas en el paso 2 ó 5 (dependiendo de que sea la primera vez tras el predictor o no). Los multiplicadores de Lagrange toman el último valor de que se disponga.

4- Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales (111a), dando como solución las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ en el instante $t+\Delta t$. Se actualizan los multiplicadores con las relaciones (111b).

5- Se recalculan las posiciones \mathbf{q}_{n+1} y velocidades $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ en el instante $t+\Delta t$ a partir de las aceleraciones $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ obtenidas en el paso 4, merced a las expresiones (118).

6- Se evalúa la diferencia entre la nueva solución y la previa. Si dicha diferencia es inferior a una tolerancia especificada (por ejemplo, 10^{-5}), la nueva solución se da por válida y se vuelve al punto 1. En caso contrario, se retorna al punto 3.

La resolución del ejemplo del péndulo doble abordado en el apartado anterior arroja prácticamente los mismos resultados. La figura 19 recoge los valores obtenidos para los multiplicadores de Lagrange.

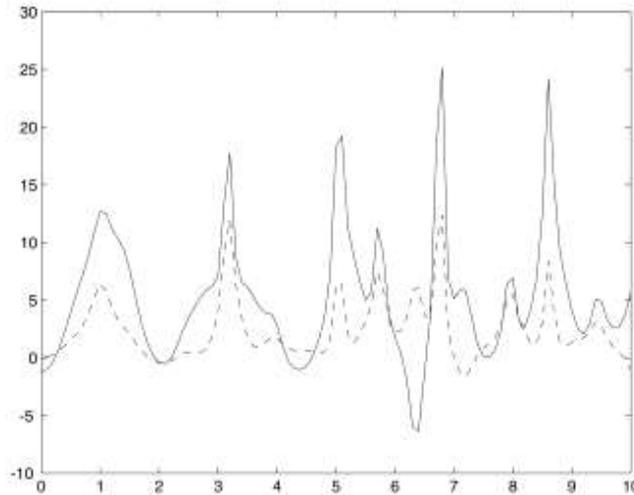


Figura 19. Multiplicadores de Lagrange del péndulo doble con regla trapezoidal y Lagrange aumentado.

4.4.3 Matriz R + Runge-Kutta de segundo orden.

El método de la matriz R implica la integración de coordenadas independientes, que resulta menos exigente que la de dependientes y puede admitir por tanto un integrador explícito. El algoritmo correspondiente se muestra a continuación.

1- Se conocen las posiciones \mathbf{z}_n y velocidades $\dot{\mathbf{z}}_n$ en un instante t , que constituyen el vector $\mathbf{y}_n = \{\mathbf{z}_n \quad \dot{\mathbf{z}}_n\}^T$ que aparece en la expresión (120a).

2- Obtención de $\dot{\mathbf{y}}_1$. Según se muestra en la expresión (120b), $\dot{\mathbf{y}}_1$ es el resultado de evaluar la función (obtener derivadas) para un valor del vector $\mathbf{y} = \mathbf{y}_n$, o lo que es lo mismo, unos valores de posiciones y velocidades independientes $\mathbf{z} = \mathbf{z}_n$, $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}_n$. El instante de tiempo es t . En base a lo dicho, se tiene que $\dot{\mathbf{y}}_1 = \{\dot{\mathbf{z}} \quad \ddot{\mathbf{z}}\}^T$. El vector $\dot{\mathbf{z}}$ ya es conocido. Para calcular las aceleraciones independientes $\ddot{\mathbf{z}}$ se han de dar los siguientes pasos:

2.1- Resolución de los problemas de posición y velocidad para obtener las posiciones dependientes \mathbf{q} y velocidades dependientes $\dot{\mathbf{q}}$.

2.2- Cálculo de la matriz \mathbf{R} según se indica en las expresiones (101) y (102).

2.3- Cálculo del vector $\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$ según lo explicado en (103) y (104).

2.4- Cálculo de las aceleraciones $\ddot{\mathbf{z}}$ mediante la resolución del sistema de ecuaciones lineales (99).

3- Obtención de $\dot{\mathbf{y}}_2$. Según se muestra en la expresión (120c), $\dot{\mathbf{y}}_2$ es el resultado de evaluar la función (obtener derivadas) para un valor del vector $\mathbf{y} = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_1 \Delta t$, o lo que es lo mismo, unos valores de posiciones y velocidades independientes $\mathbf{z} = \mathbf{z}_n + \dot{\mathbf{z}}_n \Delta t$, $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}_n + \ddot{\mathbf{z}}_n \Delta t$. Además, el tiempo a considerar es $t + \Delta t$, por lo que, caso de existir magnitudes dependientes explícitamente del tiempo en las ecuaciones dinámicas, será este valor del tiempo el que deba utilizarse. Se tiene entonces que $\dot{\mathbf{y}}_2 = \{\dot{\mathbf{z}} \quad \ddot{\mathbf{z}}\}^T$, donde $\dot{\mathbf{z}}$ ya es conocido y $\ddot{\mathbf{z}}$ se calcula de manera idéntica a la expuesta en el paso anterior.

4- Conocidos $\dot{\mathbf{y}}_1$ e $\dot{\mathbf{y}}_2$, el vector \mathbf{y}_{n+1} se obtiene de la ecuación (120a). Dado que $\mathbf{y}_{n+1} = \{\mathbf{z}_{n+1} \quad \dot{\mathbf{z}}_{n+1}\}^T$, ya se tiene el valor de posiciones y velocidades independientes en el instante siguiente, con lo que se retorna al paso 1. Si se desean conocer también las aceleraciones dependientes en cada instante, es necesario realizar el correspondiente análisis de aceleración.

Caso de utilizarse integradores de Runge-Kutta de orden superior, el esquema del algoritmo será análogo, con la única diferencia de precisar la evaluación de función en más puntos.

A continuación se resuelve el ejemplo del péndulo doble abordado también en los dos apartados anteriores, de manera que se pueda establecer la comparación. Dado que este método integra coordenadas independientes, se van a añadir dos coordenadas relativas que sirvan en todo momento para representar a los grados de libertad del sistema. Dichas coordenadas relativas son los dos ángulos que se muestran en la figura 20.

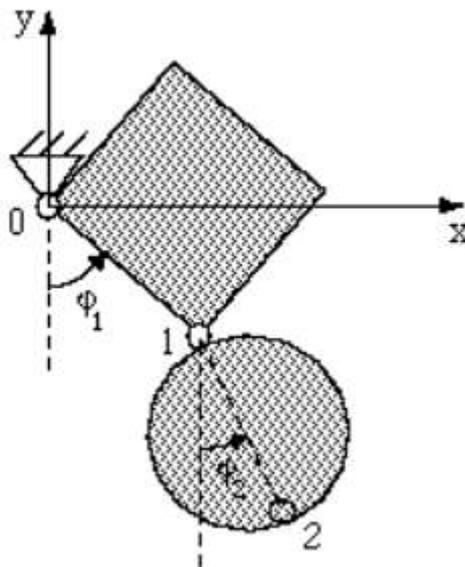


Figura 20. Coordenadas relativas en el péndulo doble.

De esta forma, el vector de variables del problema queda como sigue,

$$\mathbf{q}^T = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2\} \quad (136)$$

Desde luego, podrían haberse utilizado como variables simplemente las coordenadas cartesianas de los puntos 1 y 2, pero téngase en cuenta que, en ese supuesto, no habría dos variables capaces de representar en todo momento a los grados de libertad, haciéndose necesario cambiar de coordenadas \mathbf{z} en función de la posición del sistema. Por ejemplo, para representar el giro del cuadrado alrededor de su punto fijo, puede valer inicialmente la coordenada y_1 , cuando el punto 1 se halla sobre el eje horizontal x , pero llegará un momento, al acercarse el punto 1 a la vertical, en que será preciso cambiar a la coordenada x_1 , y este proceso de cambios sucesivos se repetirá durante todo el movimiento. Por tanto, la decisión de aumentar el tamaño del problema con las variables φ_1 y φ_2 , se ha tomado simplemente para simplificar el algoritmo. En ocasiones, el aumento de coste computacional que el aumento del tamaño del problema conlleva, podría no justificar la comodidad que supone, quedando siempre la elección a criterio del analista.

Dado que se ha modificado el vector de variables, es necesario reformular todos los términos que aparecen en las ecuaciones dinámicas. La matriz de masas y el vector de fuerzas generalizadas se obtienen muy fácilmente, sin más que añadir ceros a las expresiones (128) y (129),

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{25}{24} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{24} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (137) \quad ; \quad \mathbf{Q} = -\frac{g}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (138)$$

En cuanto a las ecuaciones de restricción, será necesario añadir una por cada nueva variable del problema, ya que el número de grados de libertad del mecanismo se mantiene invariable. Esto supondría añadir dos ecuaciones de restricción, una por cada ángulo, a las dos ya existentes. Sin embargo, como ya se dijo en el capítulo de modelización, la ecuación de restricción de un ángulo puede formularse en seno (producto vectorial) o coseno (producto escalar), siendo preciso el cambio de una a otra en función de la posición del sistema. Para evitar esta necesidad de chequeo continuo y alteración de las ecuaciones de restricción durante el movimiento, se recurre a introducir todas las

posibilidades, esto es, se añaden las ecuaciones en seno y coseno para cada ángulo. Se tendrá por tanto un sistema de ecuaciones redundantes cuyo manejo se explicó en el capítulo dedicado a Cinemática, y que sabemos no entraña complicación alguna. Hecha esta aclaración, el vector de ecuaciones de restricción resultantes será ahora,

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{c} x_1^2 + y_1^2 - 4 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 4 \\ x_1 - 2\sin\varphi_1 \\ y_1 + 2\cos\varphi_1 \\ x_2 - x_1 - 2\sin\varphi_2 \\ y_1 - y_2 - 2\cos\varphi_2 \end{array} \right\} \quad (139)$$

Y su matriz jacobiana,

$$\Phi_{\mathbf{q}} = \left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\sin\varphi_1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\cos\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2\sin\varphi_2 \end{array} \right] \quad (140)$$

Por último, el vector de aceleraciones dependientes de la velocidad vale,

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} 2(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \\ 2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2] \\ 2\dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_1 \\ 2\dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1 \\ 2\dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2 \\ 2\dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2 \end{array} \right\} \quad (141)$$

Ya se cuenta por tanto de todos los términos precisos para aplicar el algoritmo visto. Los valores iniciales de posiciones y velocidades independientes son,

$$\mathbf{z}^T = \left\{ \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \right\} \quad (142)$$

$$\dot{\mathbf{z}}^T = \{0 \ 0\} \quad (143)$$

Hay que decir que será necesario disponer de, al menos, una estimación de las posiciones dependientes en el instante inicial, ya que la resolución del problema de posición requiere un valor de partida. En este caso, la posición inicial es perfectamente conocida, por lo que se puede dar con exactitud,

$$\mathbf{q}^T = \left\{ 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \right\} \quad (144)$$

Obviamente, los dos últimos valores corresponden a las coordenadas independientes. En los pasos de integración posteriores al inicial, la estimación de posiciones dependientes necesaria para resolver el problema de posición vendrá dada por las posiciones dependientes obtenidas en el paso anterior.

La integración se lleva a cabo con un paso de tiempo de 10^{-3} segundos. La tolerancia en la resolución del problema de posición es 10^{-5} . La evolución de la coordenada vertical del extremo del péndulo doble (punto 2) se muestra en la figura 21.

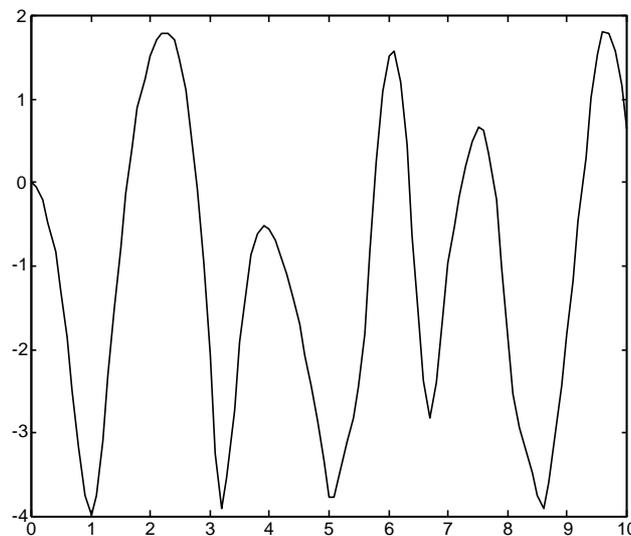


Figura 21. Historia de la coordenada vertical del extremo del péndulo doble con Runge-Kutta explícito de segundo orden y matriz R.

Como puede apreciarse, el resultado del movimiento es idéntico al obtenido con los algoritmos anteriores. A continuación, la figura 22 presenta el valor de la energía a lo largo de la simulación.

La conservación de la energía es algo mejor todavía que la conseguida con los algoritmos anteriores. El máximo error está por debajo de 0.0004, frente al

0.002 logrado previamente. Hay que tener en cuenta que se están resolviendo los problemas de posición y velocidad a cada paso de integración, por lo que no sorprende la buena conservación de la energía. Lógicamente, el esfuerzo de cálculo realizado es también superior, lo que se traduce en una menor eficiencia del algoritmo (más tiempo de ordenador para la misma simulación).

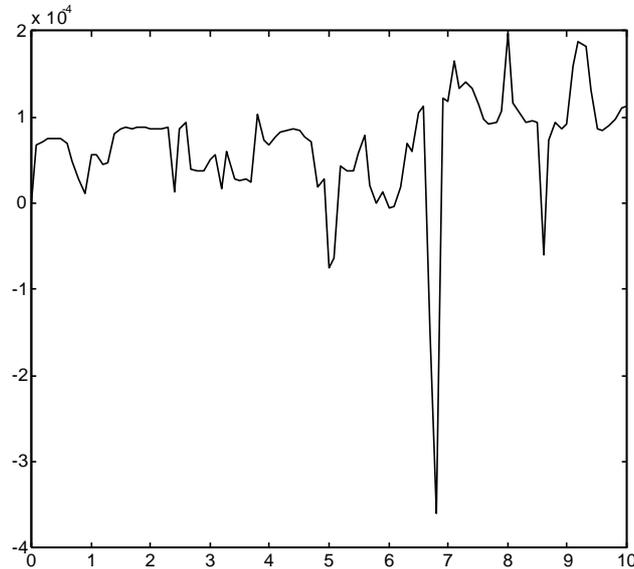


Figura 22. Historia de la energía del péndulo doble con Runge-Kutta explícito de segundo orden y matriz R.

Por último, la figura 23 muestra el nivel de cumplimiento de las dos ecuaciones de restricción de distancia,

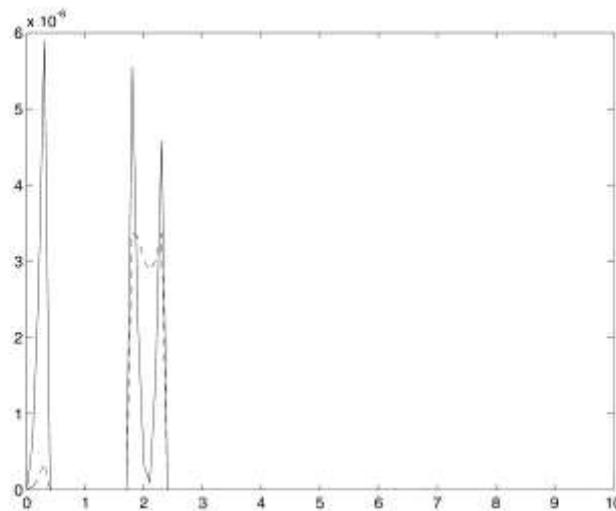


Figura 23. Violación de las restricciones del péndulo doble con Runge-Kutta explícito de segundo orden y matriz R.

También aquí puede verse el superior comportamiento de este algoritmo frente a los anteriores, planteados en coordenadas dependientes. El motivo es el mismo que antes: la resolución a cada paso de los problemas de posición y velocidad. Las restricciones nunca se incumplen más allá de 10^{-5} , dado que es precisamente la tolerancia que hemos escogido para el problema de posición.

4.4.4 Matriz R + Adams-Bashforth / Adams-Moulton.

En este esquema se utiliza el integrador implícito predictor-corrector de paso múltiple Adams-Bashforth/Adams-Moulton para integrar las coordenadas independientes que maneja el método de la matriz R. El algoritmo a seguir se muestra a continuación.

1- Conocidas las posiciones y velocidades independientes en el instante inicial, se resuelven los problemas de posición y velocidad en dicho instante, y se calculan las aceleraciones independientes mediante las ecuaciones dinámicas (99).

2- Se dan tres pasos utilizando un integrador de paso simple como, por ejemplo, el Runge-Kutta explícito de segundo orden ya explicado.

3- Se obtiene una estimación (predictor) de los valores de posición y velocidad independientes en el instante siguiente, y_{n+1} , mediante la expresión de Adams-Bashforth dada por (121).

4- Se aplica el corrector según la expresión de Adams-Moulton que se muestra en (122). La obtención del término \dot{y}_{n+1} que aparece en la parte derecha de la ecuación (122) se consigue evaluando la función (calculando derivadas) para el valor de y_{n+1} que se ha estimado en el paso anterior.

5- Se evalúa la diferencia entre la nueva solución y la previa. Si dicha diferencia es inferior a una tolerancia especificada (por ejemplo, 10^{-5}), la nueva solución se da por válida y se vuelve al punto 3. En caso contrario, se retorna al punto 4.

Nótese que para evaluar las expresiones (121) y (122) es necesario conservar los valores de posiciones, velocidades y aceleraciones independientes del paso actual y los tres anteriores.

Cada vez que se precisa evaluar la función, hay que resolver las ecuaciones dinámicas (99) que proporcionan las aceleraciones independientes. La forma de hacerlo ya se ha explicado en el apartado anterior.

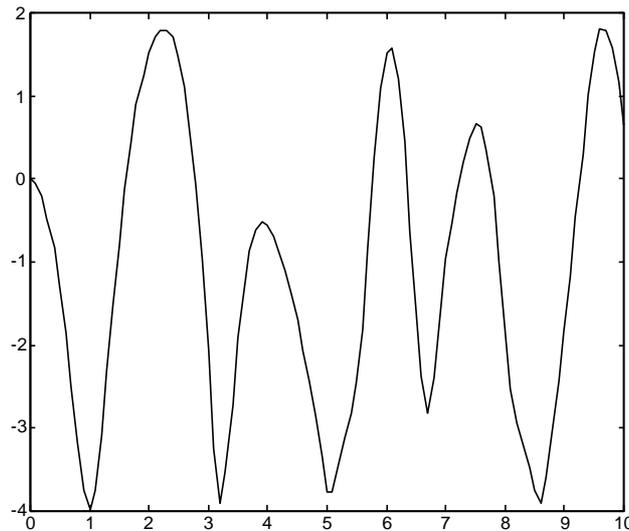


Figura 24. Historia de la coordenada vertical del extremo del péndulo doble con Adams-Bashforth/Adams-Moulton y matriz R.

De nuevo se resuelve el ejemplo del péndulo doble, utilizando las mismas variables que en el apartado anterior. Todos los términos precisos son también idénticos. El paso de tiempo es igualmente 10^{-3} segundos y las tolerancias de convergencia del integrador y problema de posición son ambas 10^{-5} .

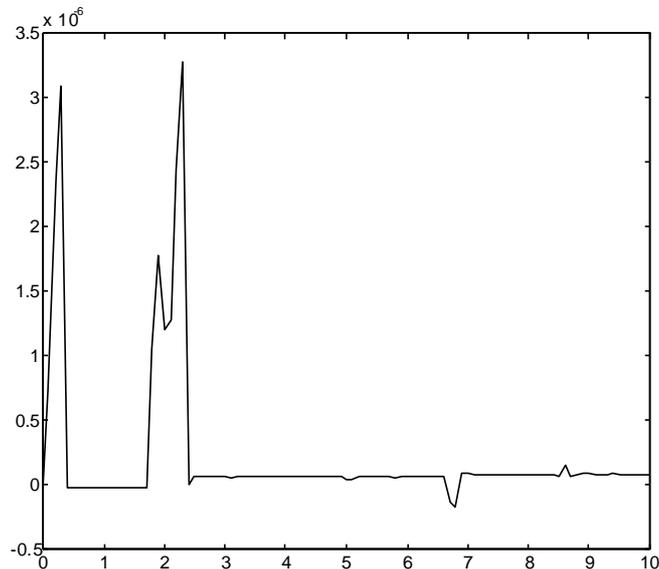


Figura 25. Historia de la energía del péndulo doble con Adams-Bashforth/Adams-Moulton y matriz R.

La historia de la coordenada vertical del punto 2 se muestra en la figura 24, apreciándose un resultado idéntico al de casos anteriores. La figura 25 presenta el nivel de conservación de la energía durante la simulación. Puede observarse que la conservación es mejor que con el integrador Runge-Kutta explícito de

segundo orden, hecho que no sorprende ya que ahora se está empleando un integrador implícito y además de paso múltiple. Por último, el cumplimiento de las restricciones se muestra en la figura 26 y se halla dentro del límite de 10^{-5} impuesto.

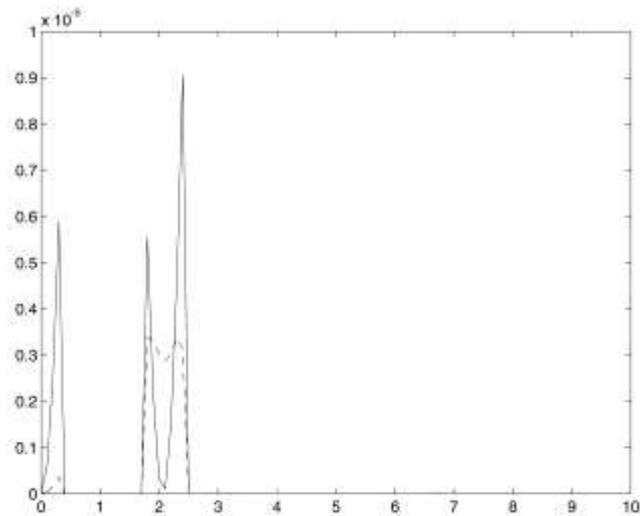


Figura 26. Violación de las restricciones del péndulo doble con Adams-Bashforth/Adams-Moulton y matriz R.

4.4.5 Comparación de la eficiencia de los algoritmos de integración.

En los apartados anteriores se ha resuelto la dinámica de un péndulo doble con cuatro algoritmos diferentes. En todos los casos se ha empleado un paso fijo de tiempo de 10^{-3} segundos, habiéndose obtenido unos resultados aceptables y muy similares con todos los algoritmos, con pequeñas diferencias en lo que a conservación de la energía y cumplimiento de las ecuaciones de restricción se refiere. Sin embargo, existe otro parámetro importante que debe ser tenido en cuenta a la hora de elegir el algoritmo de integración: la eficiencia. La eficiencia en este contexto indica el tiempo de cálculo de computador que se necesita para resolver un problema. La tabla 1 recoge los tiempos de cálculo requeridos por los algoritmos expuestos en la simulación dinámica del péndulo doble con paso fijo de 10^{-3} segundos y 10^{-2} segundos. Dichos tiempos se han obtenido ejecutando los algoritmos programados con Matlab en un computador Macintosh 6100/60AV, y no es lo importante su valor absoluto sino la comparación entre algoritmos. La tabla 1 también muestra el máximo error cometido en la energía, que es un indicador de la calidad de la solución.

	$\Delta t=10^{-3}$		$\Delta t=10^{-2}$	
	Tiempo	Error	Tiempo	Error
pen + rt	241.4	2.e-3	53.8	3.e-1
la + rt	244.9	2.e-3	54.6	3.e-1
mR + rk	603.0	4.e-4	86.1	4.e-2
mR + ab/am	598.2	3.5e-6	86.6	2.5e-3

Tabla 1. Comparación de eficiencia y precisión entre distintos algoritmos de integración.

Puede observarse en la tabla como, para un paso de tiempo de 10^{-3} segundos, los algoritmos en coordenadas dependientes son, aproximadamente, 2.5 veces más rápidos que los planteados en coordenadas independientes, si bien el error que cometen es superior. La explicación a ambos hechos está en la resolución de los problemas de posición y velocidad a cada paso que realizan los métodos en coordenadas independientes: ello les lleva a emplear más tiempo, pero los resultados obtenidos son más exactos. Obviamente, también sería posible resolver los problemas cinemáticos cuando se trabaja en coordenadas dependientes, lo que conduciría a resultados similares en eficiencia y precisión. Lo que ocurre es que, mientras para los métodos en coordenadas dependientes la resolución de los problemas de posición y velocidad es opcional, para los de independientes es obligada. Incluso se podría optar en dependientes por resolver posición y velocidad sólo cada cierto número de pasos, estableciendo un compromiso entre eficiencia y precisión.

Sin embargo, para un tiempo de 10^{-2} segundos, la diferencia se reduce, ganando los métodos en dependientes por un factor de 1.6 solamente. Ello se debe a que se está utilizando la regla trapezoidal, que es un integrador implícito, y el número medio de iteraciones para converger en cada paso aumenta al hacerlo el tamaño de paso, por lo que se precisa evaluar más veces la función (calcular aceleraciones). Por contra, el Runge-Kutta empleado es explícito, lo que significa que siempre realiza dos evaluaciones de función por paso (al ser de segundo orden), independientemente del tamaño de éste. En cuanto al predictor-corrector Adams-Bashforth/Adams-Moulton, también es implícito, pero al ser de paso múltiple e integrar coordenadas independientes con resolución de los problemas de posición y velocidad incorporada, es más preciso, como lo demuestra su nivel de error, y parece mantener el número medio de iteraciones para converger en cada paso al aumentar éste.

Comentar, por último, que, lógicamente, al aumentar el tamaño de paso aumenta también el error cometido en la integración, si bien se resuelve el problema de forma mucho más rápida.