

# Trabajo fin de Grado

## Implementación de un software de optimización de dinámica de sistemas mecánicos. Aplicación a la optimización de un vehículo

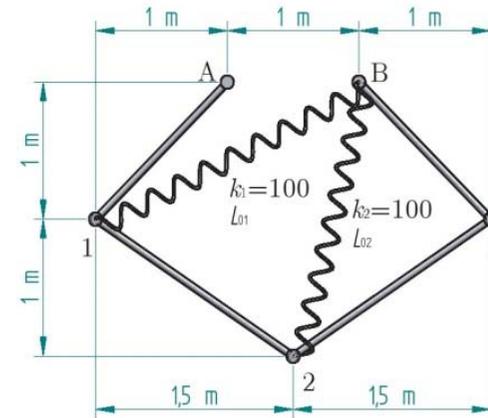
- Autor:
  - Marta Frade Manso
- Tutor:
  - Daniel Dopico Dopico
- Diciembre, 2015

# 1. Introducción

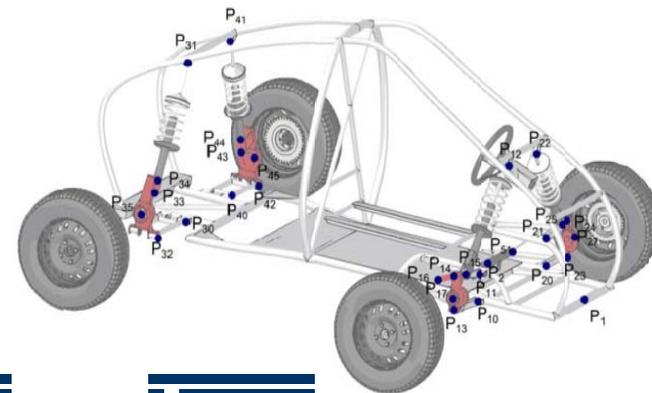
- Optimización de la respuesta dinámica de sistemas multicuerpo problema todavía abierto.
- Análisis de sensibilidad elemento clave.
- Bibliotecas
  - MBSLIM: dinámica y análisis de sensibilidad de sistemas genéricos.
  - Optimization Toolbox Matlab.
  - MBSMODEL.
- Objetivo
  - Dotar de capacidades de optimización a la MBSLIM.

## ▪ Casos implementación:

- Funciones sencillas en Matlab y Fortran.
- Mecanismo de cinco barras:



## ▪ Modelo de vehículo:



## 2. Dinámica sistemas multicuerpo

- Sistema de ecuaciones.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}$$

$$\Phi = 0$$



Index-3 DAE

- Sustituyendo en:

- Obtenemos:

$$\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{c} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}$$

- Sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas  $\rightarrow$  sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Diversas alternativas. Emplearemos formulación de matriz R.

- Relación de velocidades, aceleraciones:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{S}\mathbf{b}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{S}\mathbf{c}$$

- R y S obtenidas a través de desarrollos derivados de las ecuaciones de restricción

- Premultiplicando por  $\mathbf{R}^T$  y reordenando:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + (\Phi_q \mathbf{R})^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{c})$$

$$\Phi_q \mathbf{R} = 0$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{c})$$

- Forma compactada:

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{Q}}$$

# 3. Análisis de sensibilidad

- Función objetivo :

$$\psi = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\rho}) dt$$



$$\nabla_{\boldsymbol{\rho}} \psi^T = \frac{d\psi}{d\boldsymbol{\rho}} = \int_{t_0}^{t_f} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{z}} \right) \mathbf{z}_p + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \dot{\mathbf{z}}_p + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right) dt$$

- Se busca calcular:

- Modelo Tangente Lineal (TLM):

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{z}}_p + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{z}}_p + (\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{M}}_z \ddot{\mathbf{z}}) \mathbf{z}_p = \bar{\mathbf{Q}}_p - \bar{\mathbf{M}}_p \ddot{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{z}_p(t_0) = \mathbf{z}_{p0}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_p(t_0) = \dot{\mathbf{z}}_{p0}$$



- Cálculo restantes magnitudes:

$$\bar{\mathbf{Q}}_p = -\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{R}_p^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \mathbf{S} \mathbf{c}) + \mathbf{R}^T \left( \mathbf{Q}_p - \mathbf{M}_p \mathbf{S} \mathbf{c} - \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{S} \mathbf{c}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = -\bar{\mathbf{Q}}_q \mathbf{R}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{z}} = -\left( \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{z}} \right) = -(\bar{\mathbf{Q}}_q - \bar{\mathbf{Q}}_q \mathbf{S} \Phi_q) \mathbf{R}$$

Dopico, D., Zhu, Y., Sandu, A., y Sandu C. Sensitivity Analysis of Multibody Dynamic Systems Modeled by ODEs and DAEs.» Computational Methods and Applications, Computational Methods in Applied Sciences, vol. 35, ed. by Z. Terze, pp. 1-32 Springer, 2014

# 4. Optimización

- Para optimizar la respuesta dinámica del modelo emplearemos el Optimization Toolbox de Matlab®.

- Pasos para definir el problema:

- Definir la función objetivo. (Matlab o Fortran).
- Definir las restricciones ( archivo separado o en propia sintaxis).

```
function [c, ceq] = nombreakivo(x)
```

```
c = x12 + x22 - 1;
```

```
ceq = [];
```

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

- Por último queda ejecutar la optimización. Formas:

- Interfaz gráfica de usuario.
- Línea de comandos.
- Creación de un script.

```
options=optimset('Display','iter','Algorithm','active-set');
```

```
[x,fval]=fmincon(@rosenbrock,[0 0],[],[],[],[],[],[],[@unitdisk,options])
```

- Crearemos script y emplearemos solver fmincon, algoritmos de minimización con restricciones.

Encontrar  $x$  para minimizar  $f(x)$

sujeto a:

$$Ax \leq b, Nx = e$$

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$$

$$x_{iL} \leq x_i \leq x_{iU}$$

# 4. Optimización

## ■ Condiciones KKT

- si  $x^*$  es un mínimo local para:

$$\text{Min } f(x)$$

sujeto a:

$$g_i(x) - b_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$g_i(x) - b_i = 0 \quad i = k + 1, \dots, m$$

- gradientes restricciones en el óptimo linealmente independientes entre sí

$$(\lambda^*)^T = [\lambda_1 \dots \lambda_m]$$

$g_i(x^*) - b_i$  es factible para  $i = 1, \dots, m$

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* [g_i(x^*) - b_i] = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$\lambda_i^*$  sin restricciones para  $i = k + 1, \dots, m$

$$0 - \infty < \lambda_i < \infty$$

## ■ Explicación:

- Óptimo con restricciones factible con respecto a todas las restricciones.

- Gradiente de la función objetivo combinación lineal de los gradientes de las restricciones.

- Condición holgura complementaria.

- Multiplicadores de Lagrange para las restricciones de desigualdad deben ser positivos ya que estamos minimizando.

- Los multiplicadores de Lagrange para las restricciones de igualdad pueden ser positivos o negativos.

$$i = 1, \dots, m$$

Todas las restricciones

$$i = 1, \dots, k$$

Restricciones de desigualdad

$$i = k + 1, \dots, m$$

Restricciones de igualdad

# 4. Optimización

- Condiciones necesarias y suficientes
  - Condiciones KKT son las condiciones necesarias.
- Las suficientes para mínimo en el problema con restricciones son:
  - Cumpla las condiciones KKT para el sistema definido anteriormente.
  - El Hessiano de la función Lagrangiana con respecto a  $\mathbf{x}$ , sea positivo definido:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*)$$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(\mathbf{x}) - b_i]$$

## 5. Software utilizado

- Como ya se comentó en la introducción se ha empleado:

- MBSLIM: Para la simulación dinámica de sistemas multicuerpo genéricos(+ simulación cinemática, resolución del equilibrio estático de mecanismos).
- Matlab: En concreto la Optimization Toolbox que posee los algoritmos de optimización que necesitamos.

- Solver:

- fmincon

- Algoritmos:

- interior-point
- sqp
- active-set
- trust-region-reflective (default)

- MBSmodel

- Lenguaje Fortran 2003.
- Coordenadas naturales (+permite añadir coordenadas relativas de ángulo y distancia)
- Formulaciones dinámicas:
  - Formulación ALI3-P
  - **Formulación de Matriz R.**
  - Formulación de penalizadores.
  - Formulación Hamiltoniana aumentada .
- Integradores:
  - Regla trapezoidal implícita de paso simple.
  - Newmark disipativo.
  - HHT (Hilber, Hughes and Taylor).
  - Alfa-generalizado.
- Diferentes módulos. Módulo de fuerzas y restricciones, sólidos son los principales que emplea en usuario para modelizar.

# 6. Descripción de los casos.

- Optimización función escrita en Matlab y Fortran

- Función objetivo

$$\psi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

- Gradiente

$$\nabla \psi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Restricciones

$$c_1 = x_2 - x_1^2 + 2x_1 - 2 = 0$$

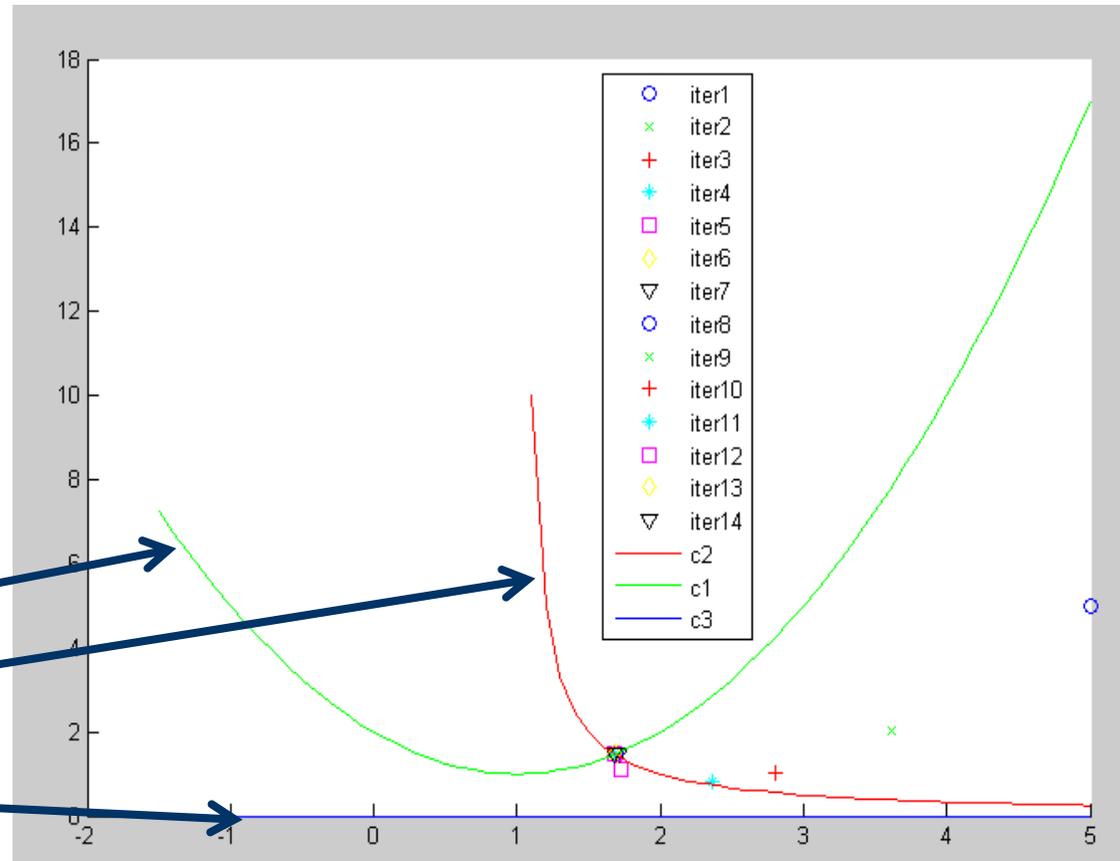
$$c_2 = -x_2(x_1 - 1) + 1 \leq 0$$

$$c_3 = -x_2 \leq 0$$

- Parámetros

$$\rho = [x_1 \ x_2]$$

- Resultados



fval =

2.4891

x =

1.6823  
1.4656

# 6. Descripción de los casos.

- Mecanismo de cinco barras:
  - Mecanismo con dos grados de libertad

- Función objetivo

$$\psi = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{20})^T (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{20}) dt$$

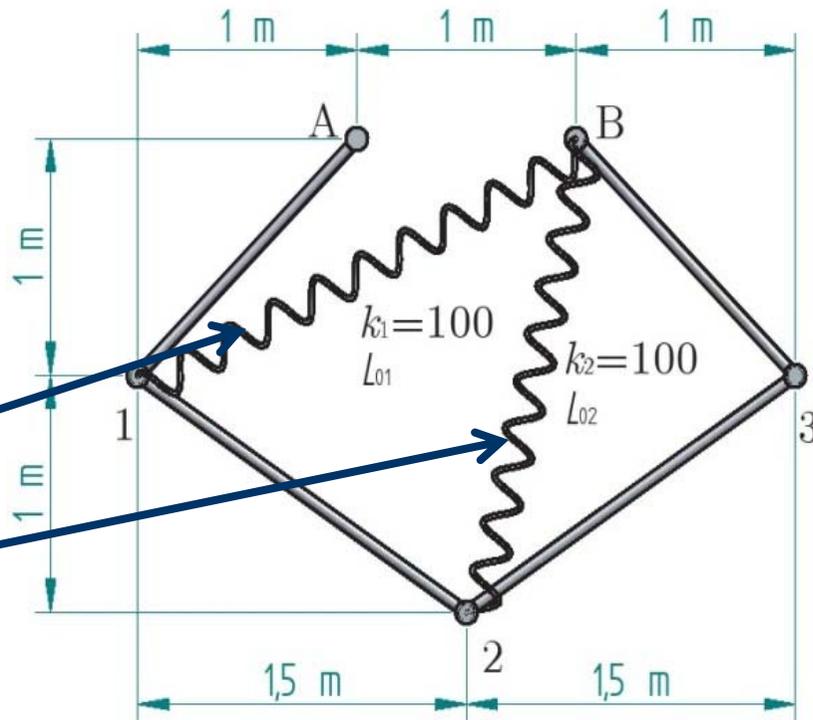
- Parámetros

$$\boldsymbol{\rho} = [L_{01} \ L_{02}]$$

- Restricciones

$$\mathbf{lb} = [0, 0]$$

$$\mathbf{ub} = [5000, 5000]$$



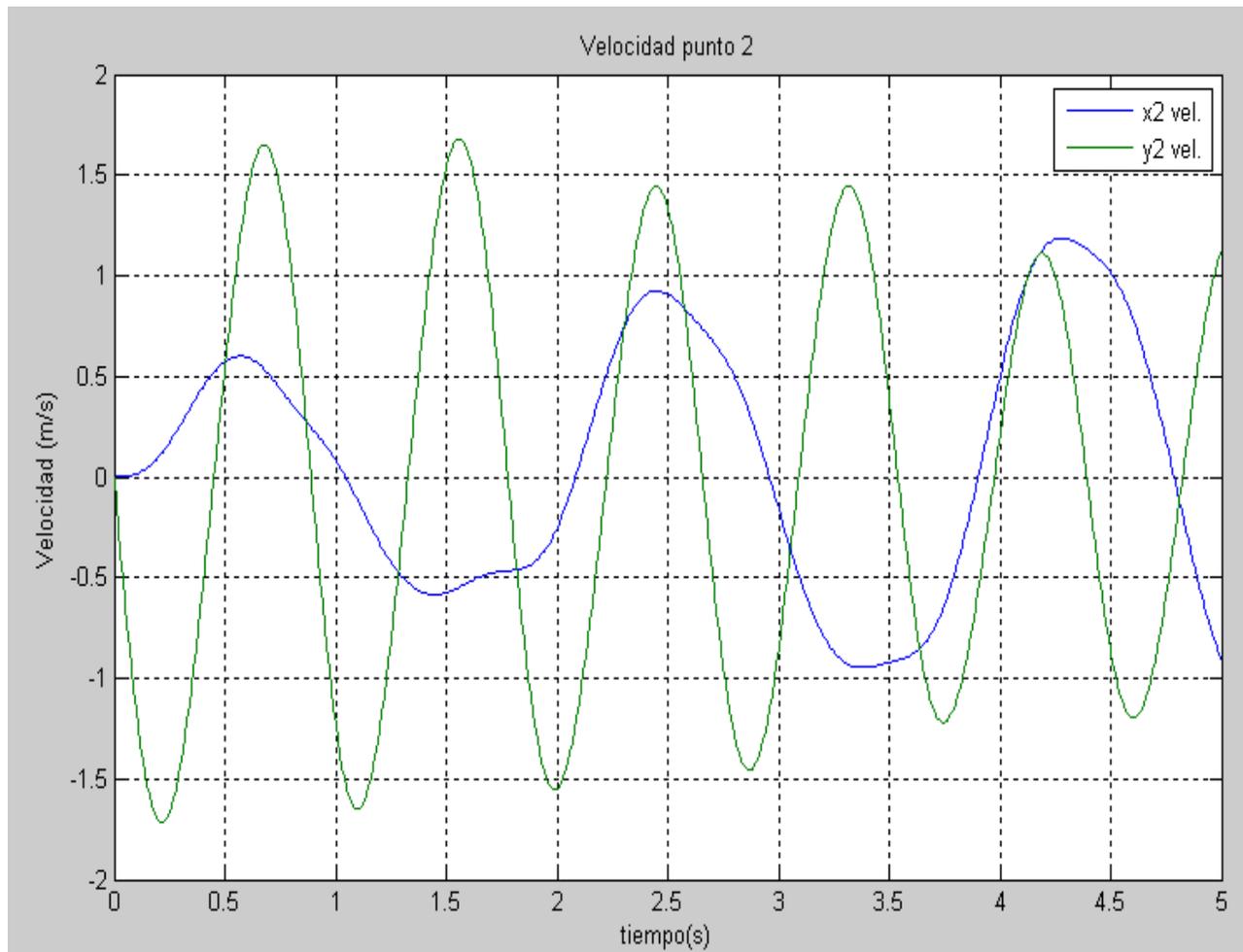
Valores  
iniciales

$$L_{01} = \sqrt{2^2 + 1^2} \text{ m}$$

$$L_{02} = \sqrt{2^2 + 0.5^2} \text{ m}$$

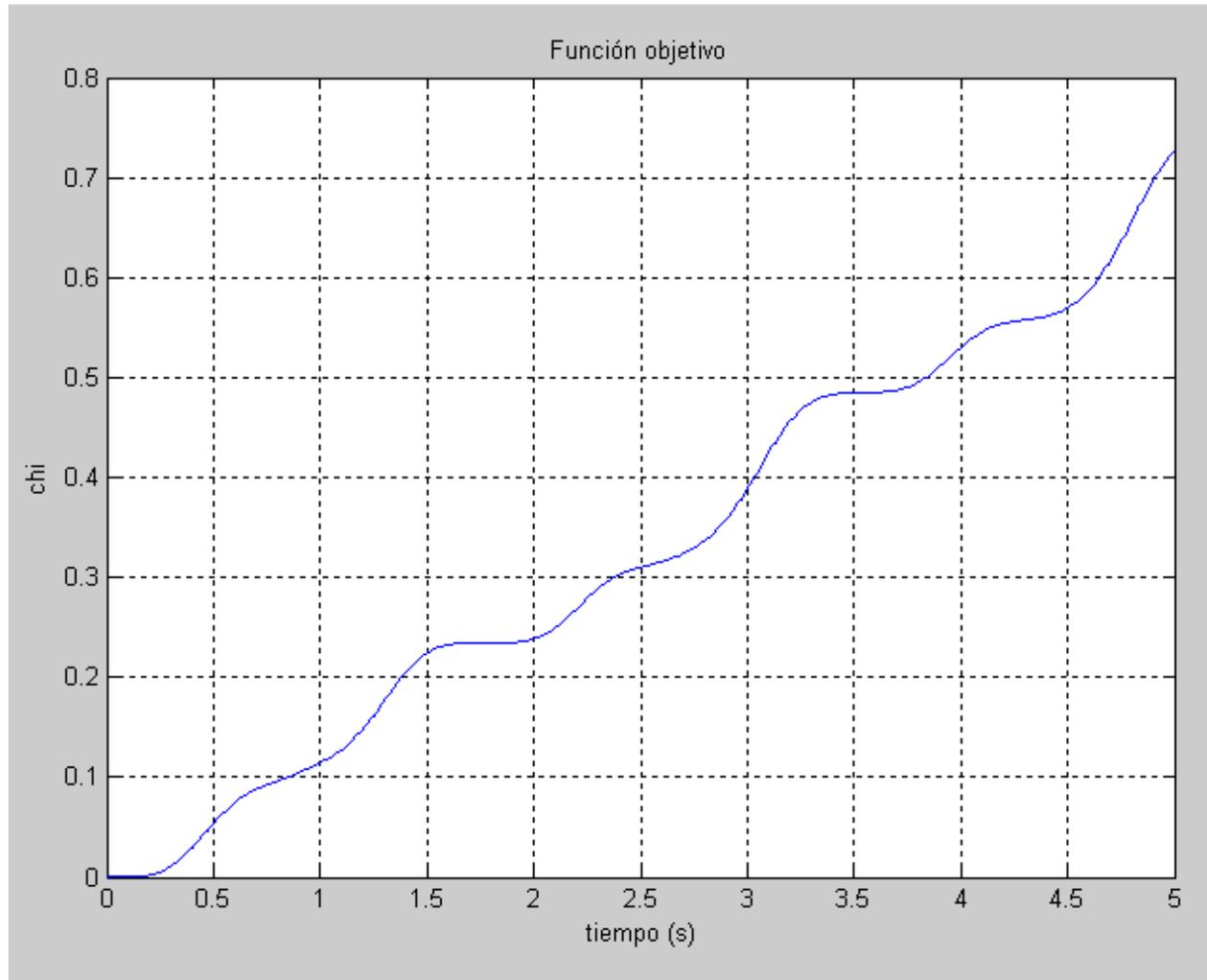
# 7. Resultados

- Caso: Optimización mecanismo de cinco barras. Dinámica.



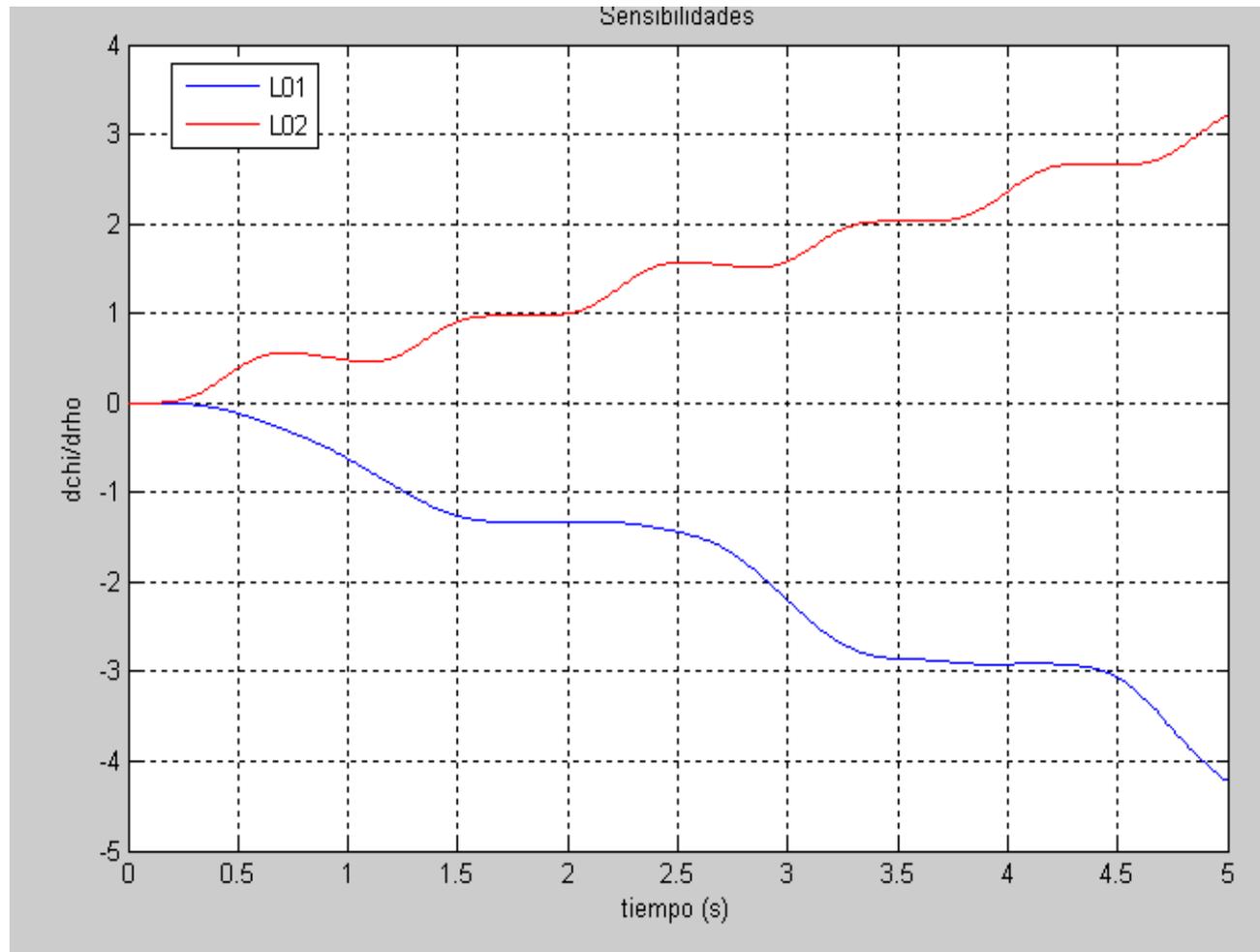
# 7. Resultados

- Caso: Optimización mecanismo de cinco barras. Dinámica



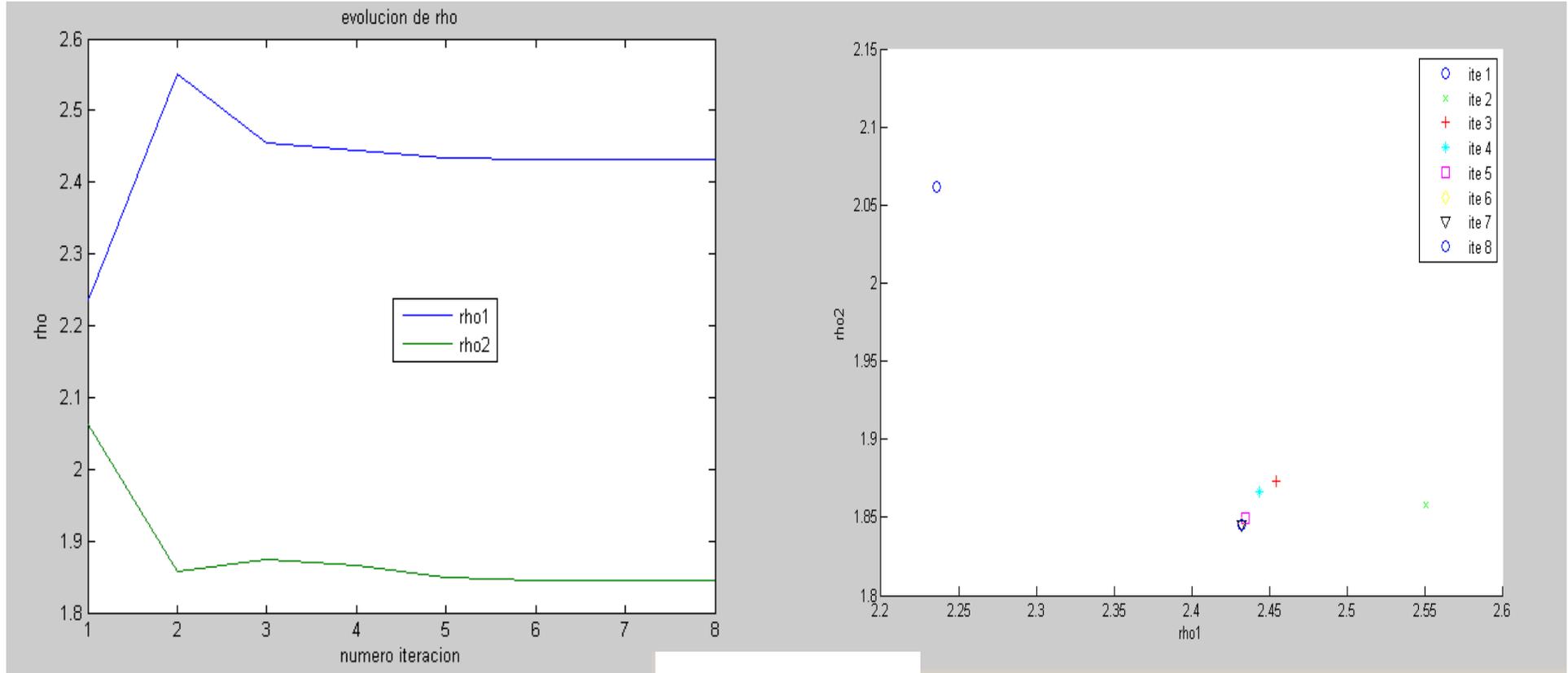
# 7. Resultados

- Caso: Optimización mecanismo de cinco barras. Sensibilidades.



# 7. Resultados

## ■ Caso: Optimización mecanismo de cinco barras



```
rho =  
  2.4319  
  1.8449  
  
chi =  
  3.1743e-15
```

# 6. Descripción de los casos.

- Vehículo:

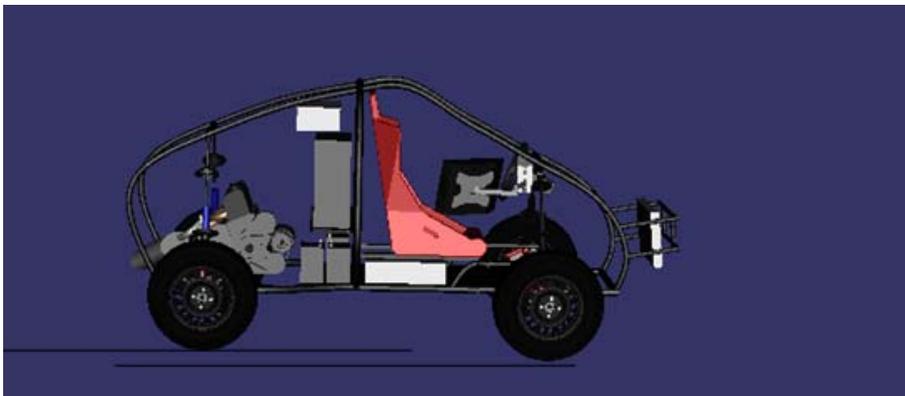
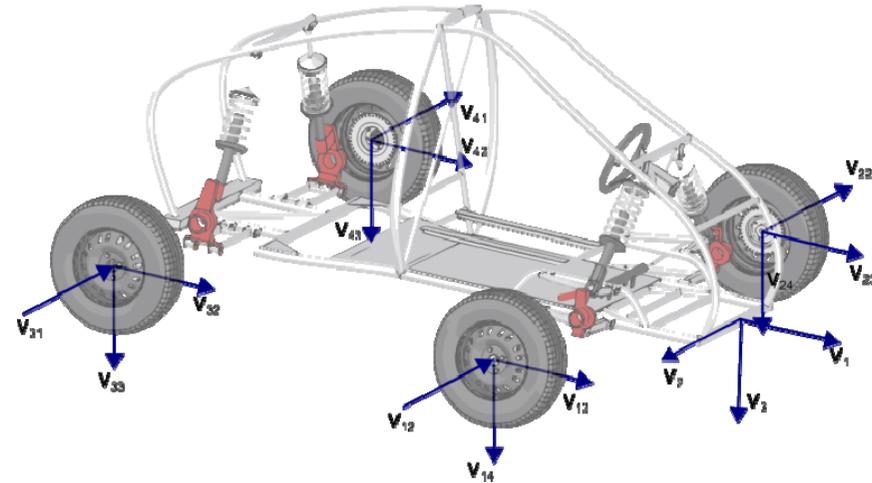
- Función objetivo

$$\int_0^t \ddot{z}_{chasis}^4 dt$$

- Parámetros

$$\rho = [k_{del} \ c_{del} \ k_{tras} \ c_{tras}]$$

- Sólo obtención de análisis de sensibilidades para mecanismo inicial.

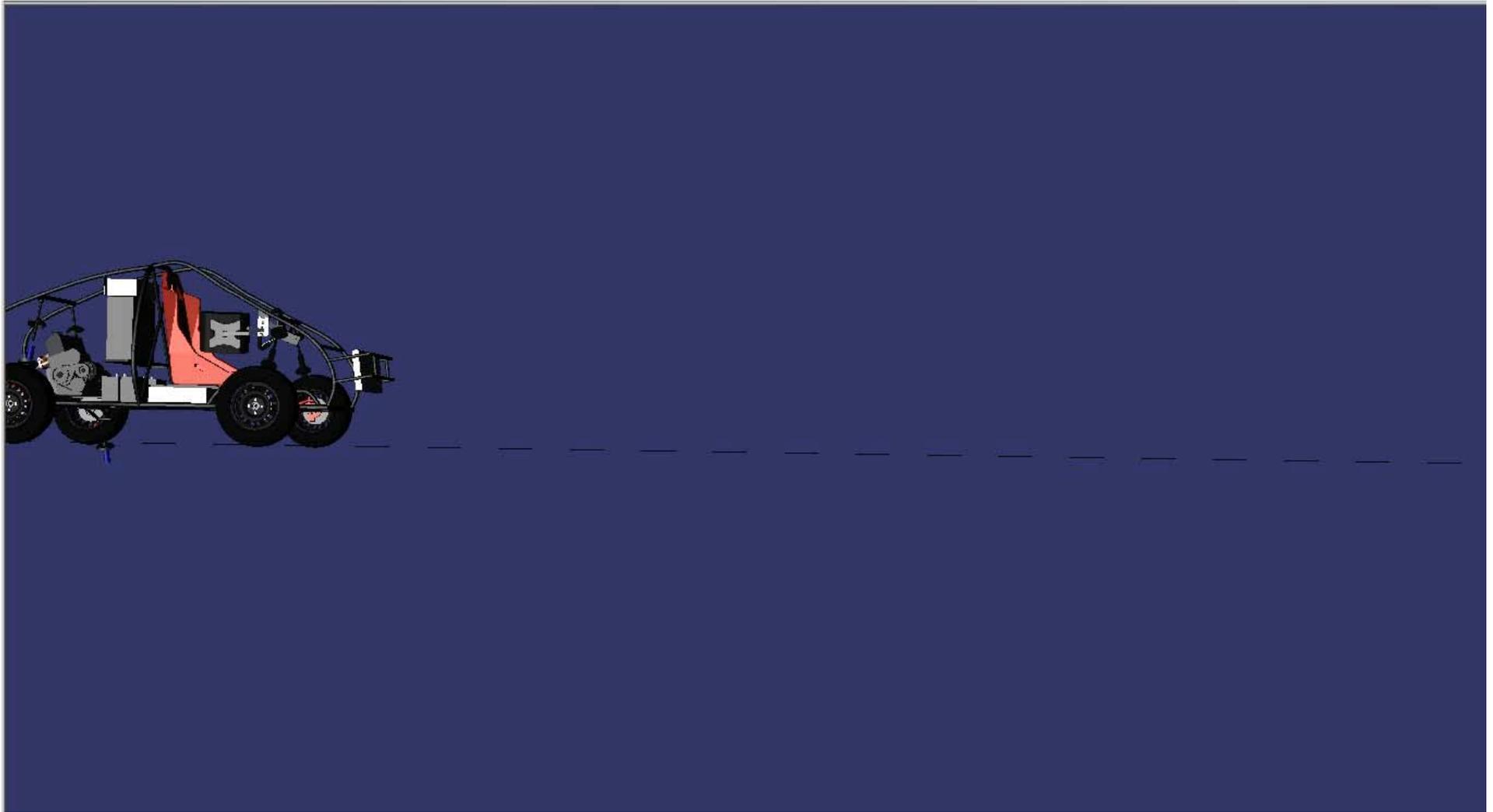


Nº variables	168
Nº restricciones efectivas	154
Nº grados de libertad	14



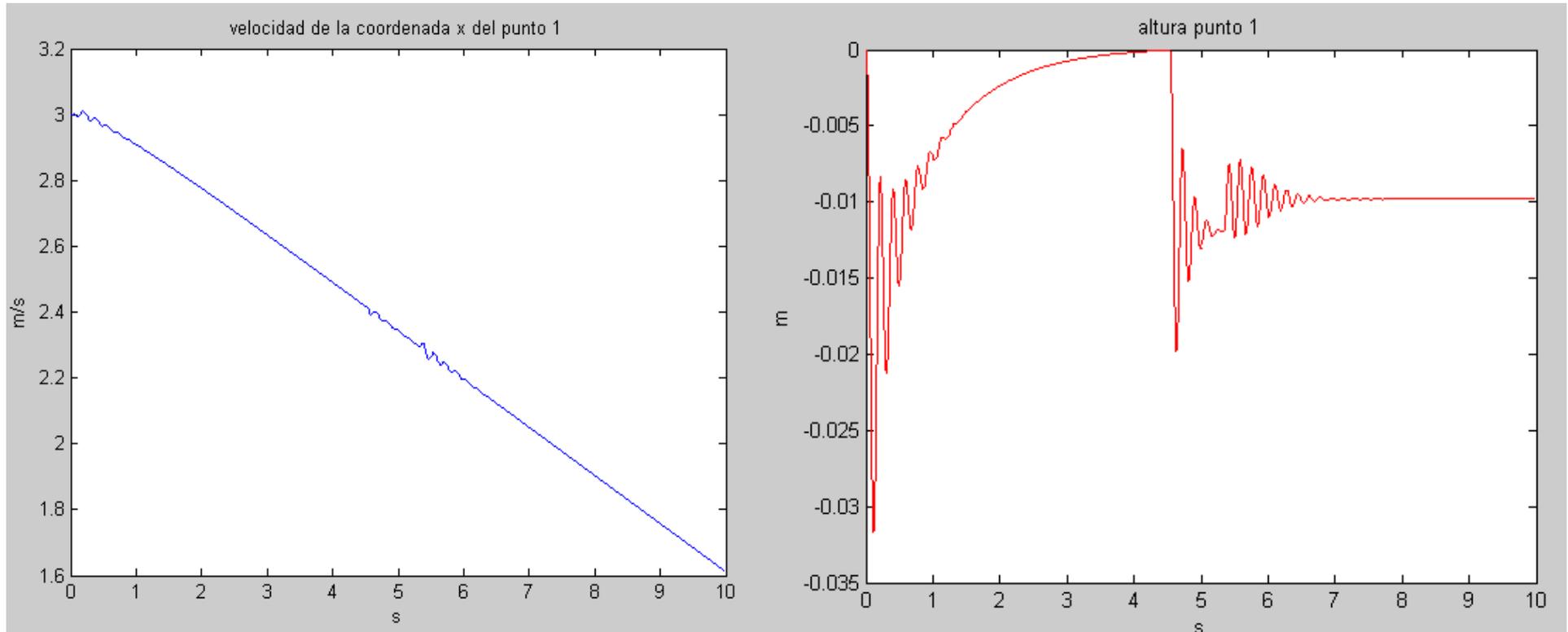
Maniobra

## 6. Descripción de los casos. Maniobra



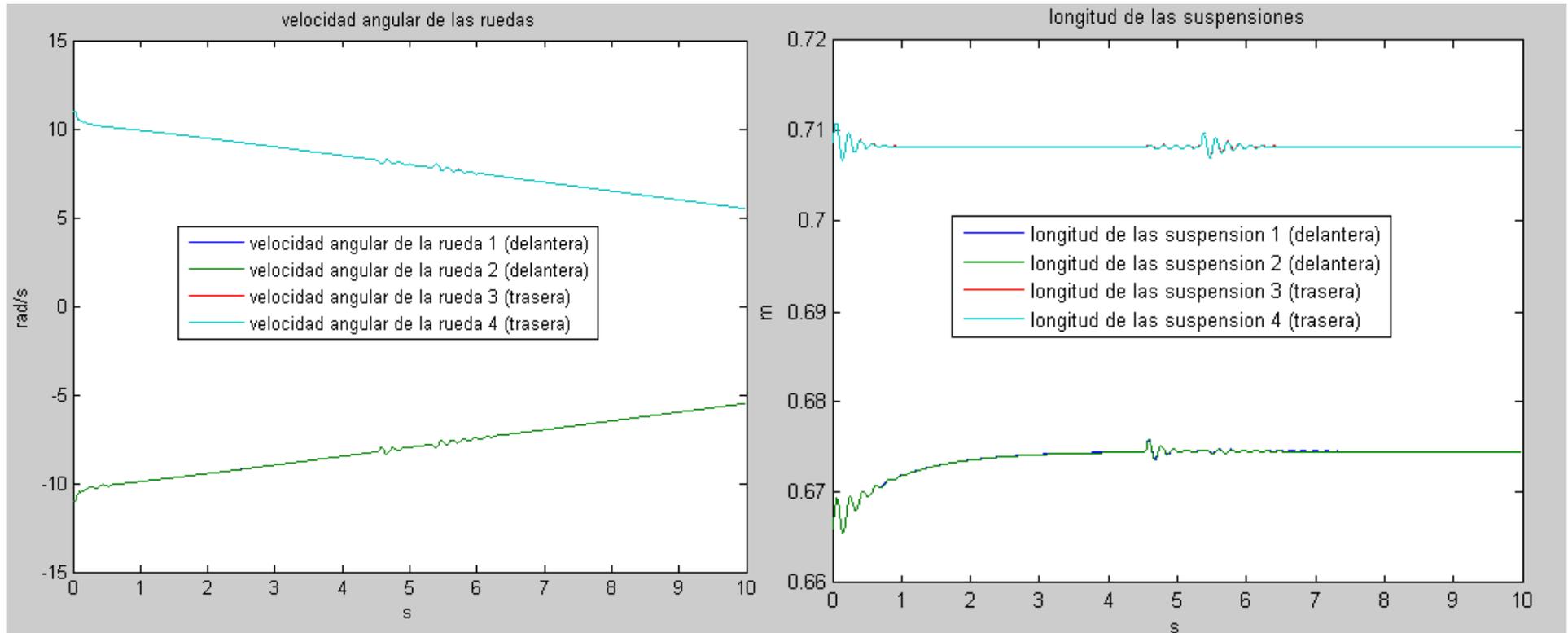
# 7. Resultados

## ■ Caso: Optimización vehículo. Dinámica



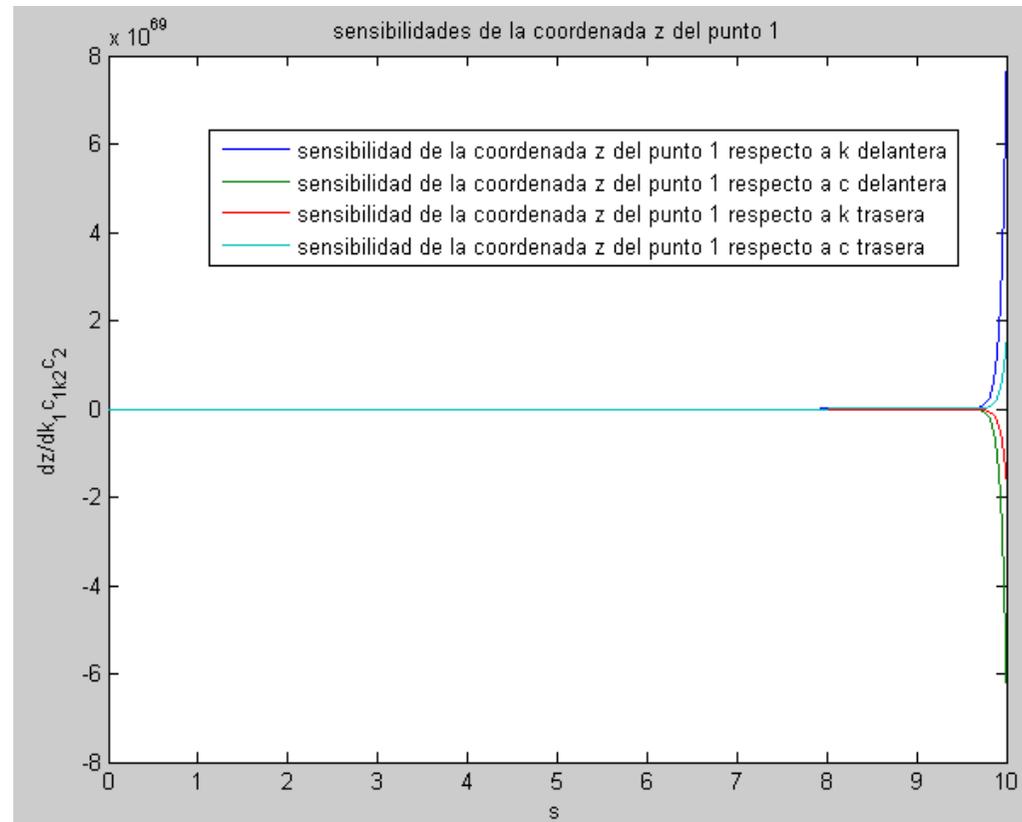
# 7. Resultados

## ■ Caso: Optimización vehículo. Dinámica.



# 7. Resultados

- Caso: Optimización vehículo. Sensibilidades.



## 8. Conclusiones

- Implementación conseguida en el mecanismo de cinco barras lo que nos permitió la optimización de los parámetros descritos así como realizar el análisis de sensibilidad de la dinámica del mecanismo.
- Implementación parcial en el modelo del vehículo ya que solo conseguimos obtener el análisis de sensibilidades. Para la parte de optimización nos haría falta más tiempo, y queda por lo tanto en la línea de trabajo futuro.
- Obtención de gráficas de optimización y sensibilidades para el caso del mecanismo de cinco barras y sólo de la dinámica y sensibilidad para el caso del modelo del vehículo.

Gracias por su atención

LIM



Laboratorio de Ingeniería Mecánica  
Universidad de La Coruña

<http://lim.ii.udc.es>

