

Formulaciones semi-recursivas y de penalización para la dinámica en tiempo real de sistemas multicuerpo

Autor: Daniel Dopico Dopico

Universidade da Coruña

Octubre, 2004

Introducción

□ MBS

- Importante herramienta de análisis en el diseño
- Prototipado virtual: reducción de costes y tiempos de diseño
- **Tiempo real**: crítico para algunas aplicaciones
 - Simuladores
 - Sistemas de control inteligente
 - Realidad virtual
 - *Human-hardware in the loop*

□ Aptitud de distintos métodos para RT en MBS

- Modelización del problema
- Formulación de las ecuaciones del movimiento
- Integradores
- Implementación

Métodos globales y topológicos

Globales

(Coordenadas globales)

- Punto de referencia
- Naturales

- ✓ Fáciles de implementar
- ✓ Sistemáticos
 - Elemento a elemento
 - Par a par

Topológicos

(Coordenadas relativas)

- ✓ Alta eficiencia

Híbrido

(Coordenadas relativas)

- ✓ Baja eficiencia

Fáciles de implementar
generales

Formulaciones de partida: Global

- Coordenadas naturales – dependientes
- Formulación de Lagrange aumentado en Index-3 con proyecciones

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha \mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_i^* + \alpha \mathbf{\Phi}_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Integrador: Regla trapezoidal

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{2}{h} \mathbf{q}_{n+1} + \hat{\dot{\mathbf{q}}}_n$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{4}{h^2} \mathbf{q}_{n+1} + \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}) = 0$$

Formulaciones de partida: Global

$\mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}) = 0$ \longrightarrow Iteración de Newton-Raphson

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{h^2}{4} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda^* + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi - \mathbf{Q}) \\ \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \cong \mathbf{M} + \frac{h}{2} \mathbf{C} + \frac{h^2}{4} (\Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}} + \mathbf{K}) \end{array} \right.$$

□ Proyecciones modificadas de velocidades y aceleraciones

$$\left(\mathbf{M} + \frac{h}{2} \mathbf{C} + \frac{h^2}{4} (\Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}} + \mathbf{K}) \right) \dot{\mathbf{q}} = \left(\mathbf{M} + \frac{h}{2} \mathbf{C} + \frac{h^2}{4} \mathbf{K} \right) \dot{\mathbf{q}}^* - \frac{h^2}{4} \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_t$$
$$\left(\mathbf{M} + \frac{h}{2} \mathbf{C} + \frac{h^2}{4} (\Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}} + \mathbf{K}) \right) \ddot{\mathbf{q}} = \left(\mathbf{M} + \frac{h}{2} \mathbf{C} + \frac{h^2}{4} \mathbf{K} \right) \ddot{\mathbf{q}}^* - \frac{h^2}{4} \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha (\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_t)$$

Formulaciones de partida: Topológica

□ Apertura de cadenas cerradas: eliminación de pares

□ Triple conjunto de coordenadas

- Cartesianas del cuerpo: $\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i^0 \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}$
- Relativas – dependientes
- Naturales
 - Restricciones de cierre de lazo

□ Términos dinámicos: coordenadas cartesianas del cuerpo

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_3 & -m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^G \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^G & \mathbf{J}_i^G + m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^G \tilde{\mathbf{r}}_i^G \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{Q}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i - m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_i^G \\ \mathbf{n}_i^G - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{J}_i^G \boldsymbol{\omega}_i + \tilde{\mathbf{r}}_i^G \left(\mathbf{f}_i - m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_i^G \right) \end{pmatrix}$$

Formulaciones de partida: Topológica

- Ecuación del movimiento en coordenadas cartesianas

$$\boxed{(\mathbf{z}^*)^T \{\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{Q}}\} = 0}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T \quad \mathbf{z}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{z}_{nb}^T)^T$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{M}}_{nb} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_1 \\ \bar{\mathbf{Q}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{Q}}_{nb} \end{pmatrix}$$

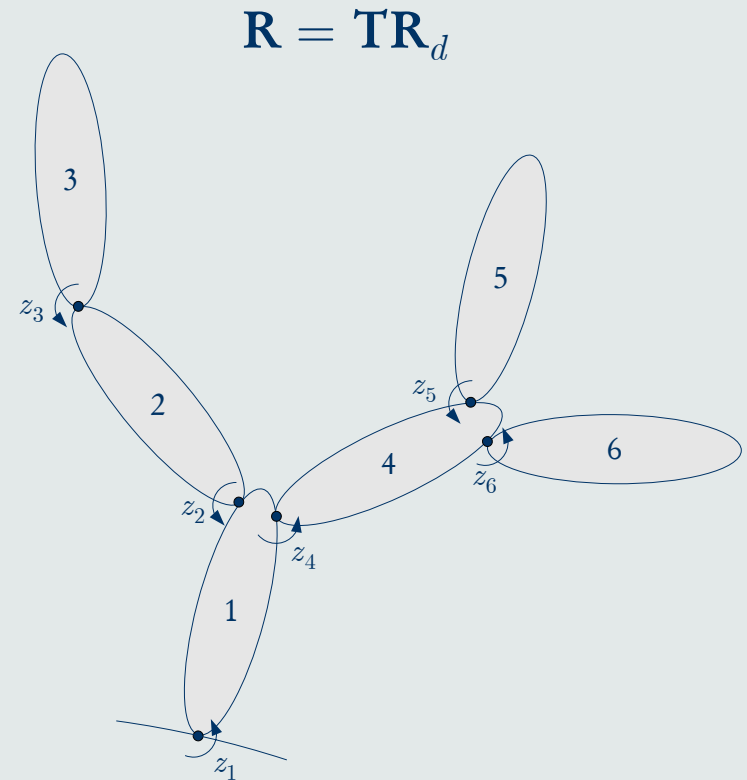
Formulaciones de partida: Topológica

□ Primera proyección de velocidades:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_6 & \mathbf{I}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_6 & \mathbf{I}_6 & \mathbf{I}_6 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_6 & 0 & 0 & \mathbf{I}_6 & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_6 & 0 & 0 & \mathbf{I}_6 & \mathbf{I}_6 & 0 \\ \mathbf{I}_6 & 0 & 0 & \mathbf{I}_6 & 0 & \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}$$

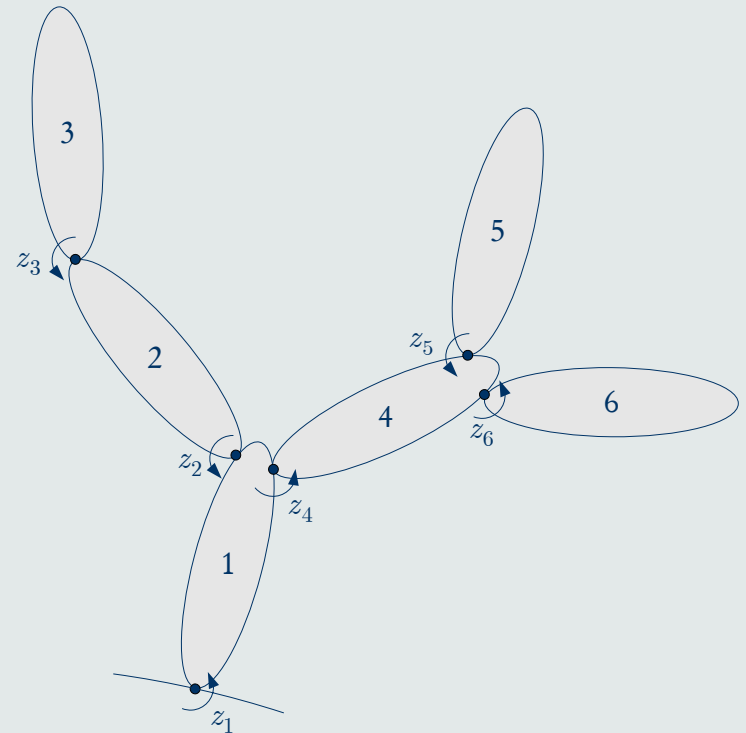
$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_6 \end{bmatrix}$$



Formulaciones de partida: Topológica

□ Primera proyección de velocidades: $\boxed{\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \end{aligned}}$

$$\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{R}}_d\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_4 + \mathbf{d}_5 \\ \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_4 + \mathbf{d}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})_1 \\ (\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})_2 \\ (\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})_3 \\ (\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})_4 \\ (\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})_5 \\ (\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})_6 \end{pmatrix}$$



Formulaciones de partida: Topológica

□ Ecuación del movimiento en coordenadas relativas

$$\dot{\mathbf{z}}^{*T} \left\{ \mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{Q}^d \right\} = 0$$

$$\mathbf{M}^d = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} = \mathbf{R}_d^T \left(\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T} \right) \mathbf{R}_d =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{M}_1^\Sigma \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{M}_2^\Sigma \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{M}_3^\Sigma \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{M}_4^\Sigma \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{M}_5^\Sigma \mathbf{b}_5 & \mathbf{b}_1^T \mathbf{M}_6^\Sigma \mathbf{b}_6 \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{M}_2^\Sigma \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2^T \mathbf{M}_2^\Sigma \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_2^T \mathbf{M}_3^\Sigma \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_3^T \mathbf{M}_3^\Sigma \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_3^T \mathbf{M}_3^\Sigma \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3^T \mathbf{M}_3^\Sigma \mathbf{b}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_4^T \mathbf{M}_4^\Sigma \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & \mathbf{b}_4^T \mathbf{M}_4^\Sigma \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_4^T \mathbf{M}_5^\Sigma \mathbf{b}_5 & \mathbf{b}_4^T \mathbf{M}_6^\Sigma \mathbf{b}_6 \\ \mathbf{b}_5^T \mathbf{M}_5^\Sigma \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & \mathbf{b}_5^T \mathbf{M}_5^\Sigma \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5^T \mathbf{M}_5^\Sigma \mathbf{b}_5 & 0 \\ \mathbf{b}_6^T \mathbf{M}_6^\Sigma \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & \mathbf{b}_6^T \mathbf{M}_6^\Sigma \mathbf{b}_4 & 0 & \mathbf{b}_6^T \mathbf{M}_6^\Sigma \mathbf{b}_6 \end{pmatrix}$$

Formulaciones de partida: Topológica

- Ecuación del movimiento en coordenadas relativas

$$\dot{\mathbf{z}}^{*\text{T}} \left\{ \mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{Q}^d \right\} = 0$$

$$\mathbf{M}^d = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} = \mathbf{R}_d^T \left(\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T} \right) \mathbf{R}_d =$$

$$\mathbf{Q}^d = \mathbf{R}^T \left(\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}} \right) = \mathbf{R}_d^T \left(\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T} \dot{\mathbf{R}}_d \dot{\mathbf{z}} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{Q}_1^\Sigma \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{Q}_2^\Sigma \\ \mathbf{b}_3^T \mathbf{Q}_3^\Sigma \\ \mathbf{b}_4^T \mathbf{Q}_4^\Sigma \\ \mathbf{b}_5^T \mathbf{Q}_5^\Sigma \\ \mathbf{b}_6^T \mathbf{Q}_6^\Sigma \end{pmatrix}$$

Formulaciones de partida: Topológica

□ Segunda proyección de velocidades:

- Condiciones de cierre de lazo
- Coordenadas relativas independientes
- Procedimiento no recursivo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{R}^{\Phi} \dot{\mathbf{z}}^i \\ \ddot{\mathbf{z}} &= \mathbf{R}^{\Phi} \ddot{\mathbf{z}}^i + \dot{\mathbf{R}}^{\Phi} \dot{\mathbf{z}}^i \end{aligned}$$

□ Ecs. en coord. relativas independientes

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^i &= \mathbf{R}^{\Phi T} \mathbf{M}^d \mathbf{R}^{\Phi} \\ \mathbf{Q}^i &= \mathbf{R}^{\Phi T} (\mathbf{Q}^d - \mathbf{M}^d \dot{\mathbf{R}}^{\Phi} \dot{\mathbf{z}}^i) \end{aligned} \right\} \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{z}}^i = \mathbf{Q}^i \quad \text{(ODE)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}_{n+1}^i) = 0$$

□ Regla trapezoidal

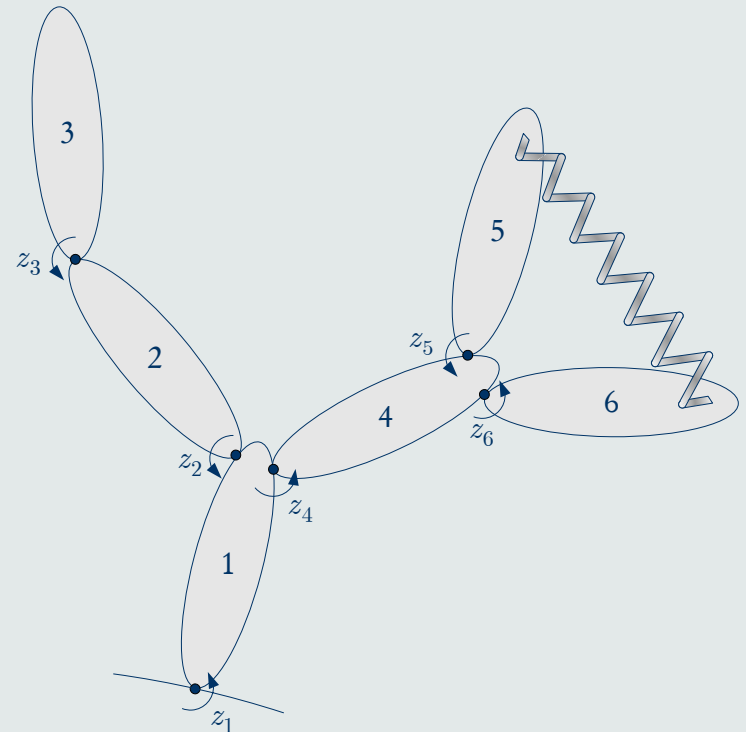
$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_{n+1}^i &= \frac{2}{h} \mathbf{z}_{n+1}^i + \hat{\dot{\mathbf{z}}}_n^i \\ \ddot{\mathbf{z}}_{n+1}^i &= \frac{4}{h^2} \mathbf{z}_{n+1}^i + \hat{\ddot{\mathbf{z}}}_n^i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{z}_{n+1}^i) &= (\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{z}}^i - \mathbf{Q}^i)_{n+1} \\ \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}^i)}{\partial \mathbf{z}^i} \right] &= \mathbf{M}^i + \frac{h}{2} \mathbf{C}^i + \frac{h^2}{4} \mathbf{K}^i \end{aligned}$$

Formulaciones de partida: Topológica

- Matrices de rigidez y amortiguamiento en relativas independientes

$$\mathbf{K}^i = \mathbf{R}^{\Phi T} \mathbf{K}^d \mathbf{R}^{\Phi}$$
$$\mathbf{C}^i = \mathbf{R}^{\Phi T} \mathbf{C}^d \mathbf{R}^{\Phi}$$

$$\mathbf{K}^d = -\frac{\partial \mathbf{Q}^d}{\partial \mathbf{z}} = s_{\mathbf{z}}^T \left(\frac{\partial g_m(s)}{\partial s} \right) s_{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{C}^d = -\frac{\partial \mathbf{Q}^d}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = s_{\mathbf{z}}^T \left(\frac{\partial g_d(\dot{s})}{\partial \dot{s}} \right) s_{\mathbf{z}}$$
$$s_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial z_1} & \frac{\partial s}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial s}{\partial z_{nd}} \end{pmatrix}$$



Formulación híbrida

- Ecuación del movimiento en coordenadas relativas

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^d &= \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} = \mathbf{R}_d^T \left(\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T} \right) \mathbf{R}_d \\ \mathbf{Q}^d &= \mathbf{R}^T \left(\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}} \right) = \mathbf{R}_d^T \left(\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T} \mathbf{R}_d \dot{\mathbf{z}} \right) \end{aligned} \right\} \dot{\mathbf{z}}^{*T} \left\{ \mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{Q}^d \right\} = 0$$

- Ecuaciones de restricción de cierre de cadena $\Phi(\mathbf{q}) = 0$



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{z}} + \Phi_z^T \lambda &= \mathbf{Q}^d \\ \Phi(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Sistema } \mathbf{DAE}$$

Formulación híbrida

- Lagrange aumentado en Index-3 con proyecciones

$$\mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{z}} + \Phi_{\mathbf{z}}^T \boldsymbol{\lambda}^* + \Phi_{\mathbf{z}}^T \alpha \Phi = \mathbf{Q}^d$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_i^* + \alpha \Phi_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Regla trapezoidal

$$\dot{\mathbf{z}}_{n+1}^i = \frac{2}{h} \mathbf{z}_{n+1}^i + \hat{\dot{\mathbf{z}}}_n^i$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_{n+1}^i = \frac{4}{h^2} \mathbf{z}_{n+1}^i + \hat{\ddot{\mathbf{z}}}_n^i$$

$$\longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{z}_{n+1}) = 0$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \frac{h^2}{4} \left(\mathbf{M}^d \ddot{\mathbf{z}} + \Phi_{\mathbf{z}}^T \boldsymbol{\lambda}^* + \Phi_{\mathbf{z}}^T \alpha \Phi - \mathbf{Q}^d \right)_{n+1}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \cong \mathbf{M}^d + \frac{h}{2} \mathbf{C}^d + \frac{h^2}{4} \left(\Phi_{\mathbf{z}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^d \right)$$

Formulación híbrida

□ Proyecciones de velocidades y aceleraciones

$$\left(\mathbf{M}^d + \frac{h}{2} \mathbf{C}^d + \frac{h^2}{4} (\mathbf{\Phi}_z^T \alpha \mathbf{\Phi}_z + \mathbf{K}^d) \right) \dot{\mathbf{z}} = \left(\mathbf{M}^d + \frac{h}{2} \mathbf{C}^d + \frac{h^2}{4} \mathbf{K}^d \right) \dot{\mathbf{z}}^*$$

$$\left(\mathbf{M}^d + \frac{h}{2} \mathbf{C}^d + \frac{h^2}{4} (\mathbf{\Phi}_z^T \alpha \mathbf{\Phi}_z + \mathbf{K}^d) \right) \ddot{\mathbf{z}} = \left(\mathbf{M}^d + \frac{h}{2} \mathbf{C}^d + \frac{h^2}{4} \mathbf{K}^d \right) \ddot{\mathbf{z}}^* - \frac{h^2}{4} \mathbf{\Phi}_z^T \alpha \dot{\mathbf{\Phi}}_z \dot{\mathbf{z}}$$

□ Términos derivados de restricciones

$\Phi(\mathbf{q})$ (coordenadas naturales)

$\Phi_z = \Phi_q \mathbf{q}_z$ (coordenadas relativas)

$\dot{\Phi}_z \dot{\mathbf{z}} = (\dot{\Phi}_q \mathbf{q}_z + \Phi_q \dot{\mathbf{q}}_z) \dot{\mathbf{z}}$

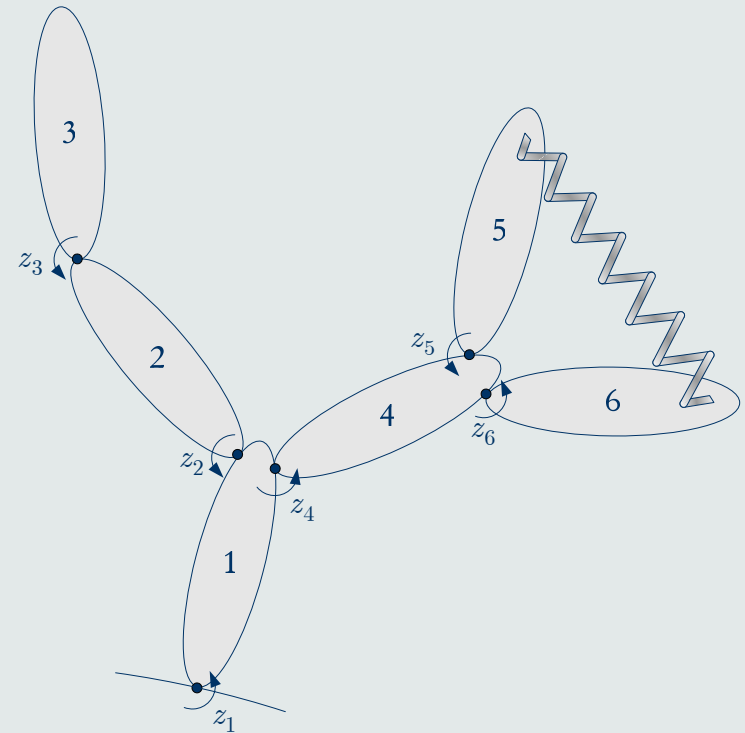
- Términos Φ_q y $\dot{\Phi}_q$: método global
- Términos \mathbf{q}_z y $\dot{\mathbf{q}}_z$: relaciones cinemáticas

Formulación híbrida

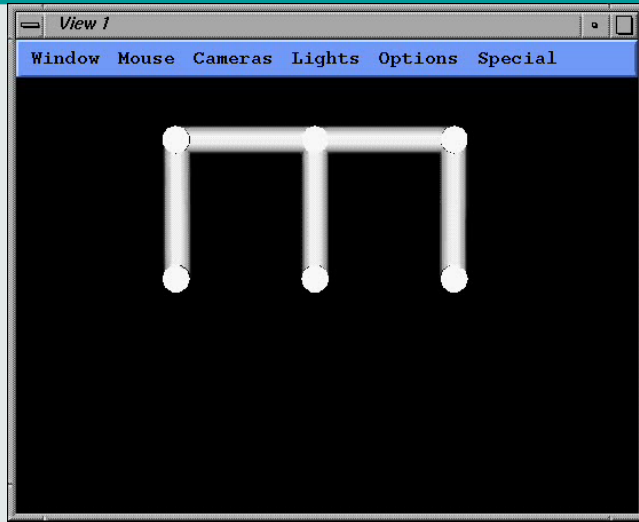
- Matrices de rigidez y amortiguamiento en relativas dependientes

$$\mathbf{K}^d = -\frac{\partial \mathbf{Q}^d}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{s}_z^T \left(\frac{\partial \mathbf{g}_m(s)}{\partial s} \right) \mathbf{s}_z$$
$$\mathbf{C}^d = -\frac{\partial \mathbf{Q}^d}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = \mathbf{s}_z^T \left(\frac{\partial \mathbf{g}_d(\dot{s})}{\partial \dot{s}} \right) \mathbf{s}_z$$

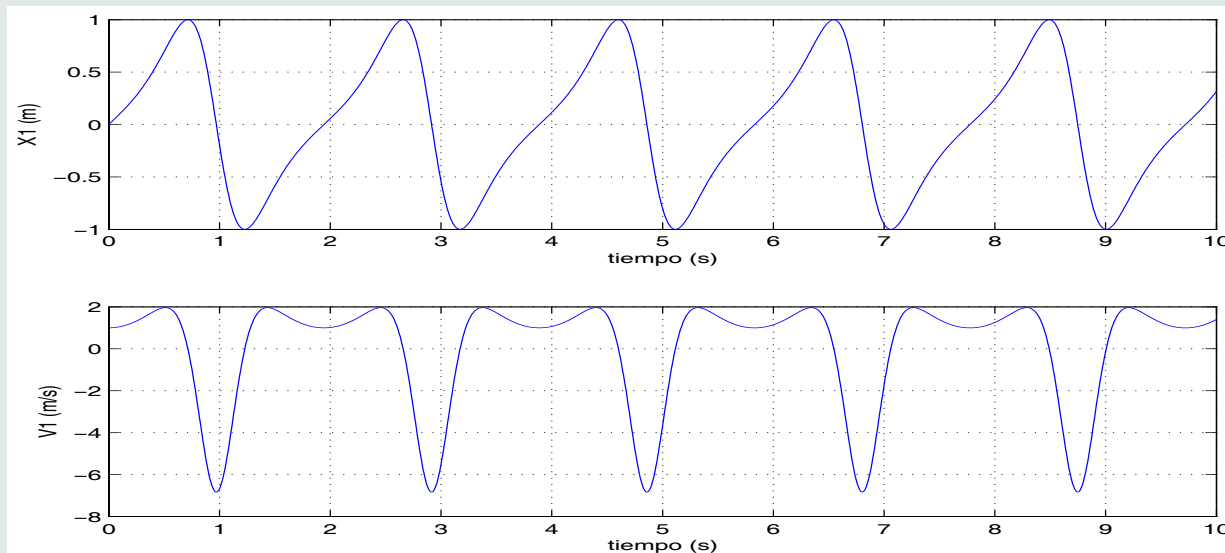
$$\mathbf{s}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial z_1} & \frac{\partial s}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial s}{\partial z_{nd}} \end{pmatrix}$$



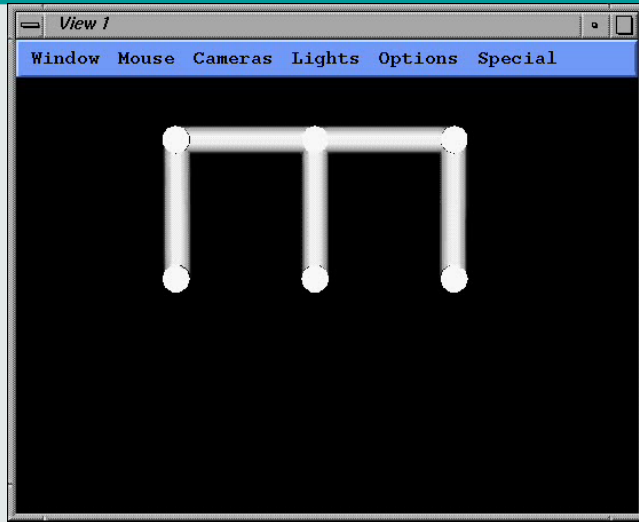
Ejemplo 1: Doble cuadrilátero



- Simulación de 10 s.
- Posiciones singulares
- Velocidad inicial y acción de la gravedad
- Implementación en MATLAB
- Coord: 6 globales / 5 relativas / 1 dof



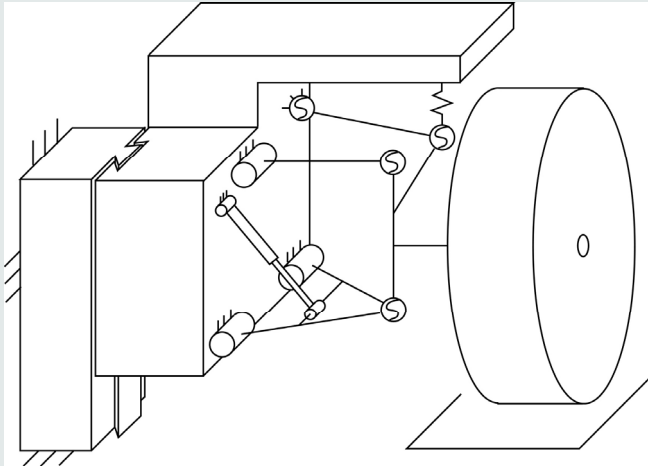
Ejemplo 1: Doble cuadrilátero



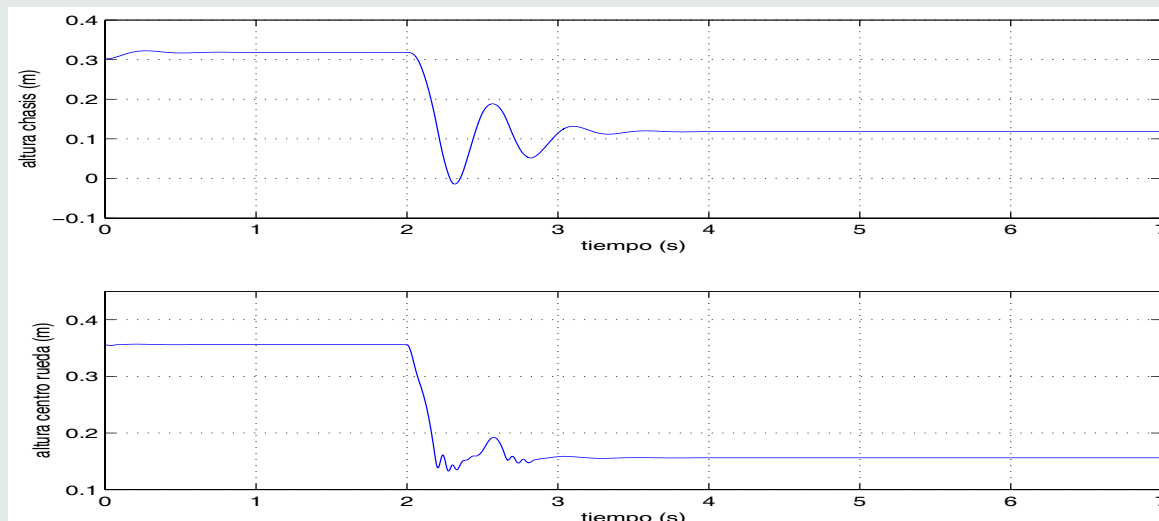
- Simulación de 10 s.
- Posiciones singulares
- Velocidad inicial y acción de la gravedad
- Implementación en MATLAB
- Coord: 6 globales / 5 relativas / 1 dof

h (s)	Global		Topológico		Híbrido	
	Error	Tiempo	Error	Tiempo	Error	Tiempo
0.01	-0.21	0.86	no converge		-0.01	3.20
0.03	-0.83	0.37	no converge		-0.12	1.32
0.05	-9.03	0.26	no converge		-0.34	0.83
0.1	malos resultados		no converge		-1.34	0.52

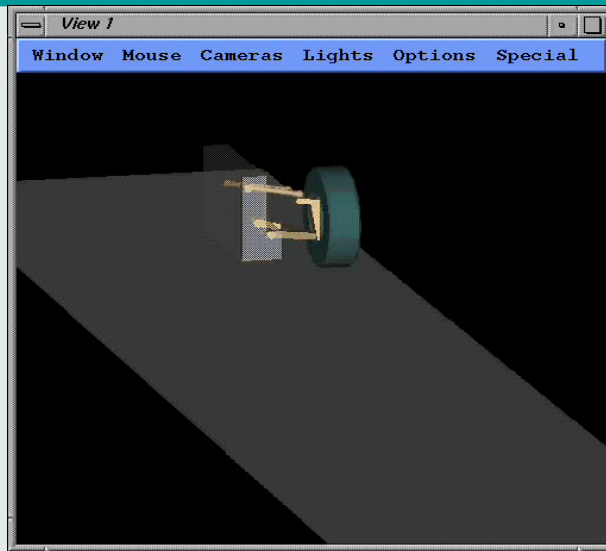
Ejemplo 2: Suspensión de coche



- ❑ Simulación de 7 s.
- ❑ Comportamiento *stiff*
- ❑ Equilibrio estático + 20 cm de escalón
- ❑ Implementación en MATLAB
- ❑ Coord: 25 globales / 8 relativas / 2 dof



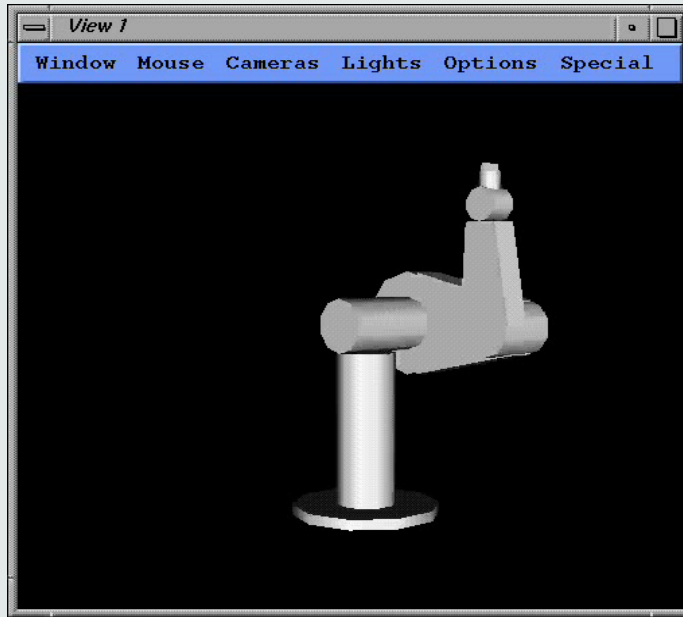
Ejemplo 2: Suspensión de coche



- Simulación de 7 s.
- Comportamiento *stiff*
- Equilibrio estático + 20 cm de escalón
- Implementación en MATLAB
- Coord: 25 globales / 8 relativas / 2 dof

h (s)	Global		Topológico		Híbrido	
	Error	Tiempo	Error	Tiempo	Error	Tiempo
0.001	-43.13	17.8	-43.49	45.7	-42.05	43.2
0.01	-43.45	2.04	-44.06	6.04	-42.80	5.44
0.03	-57.96	0.84	no convergente		no convergente	

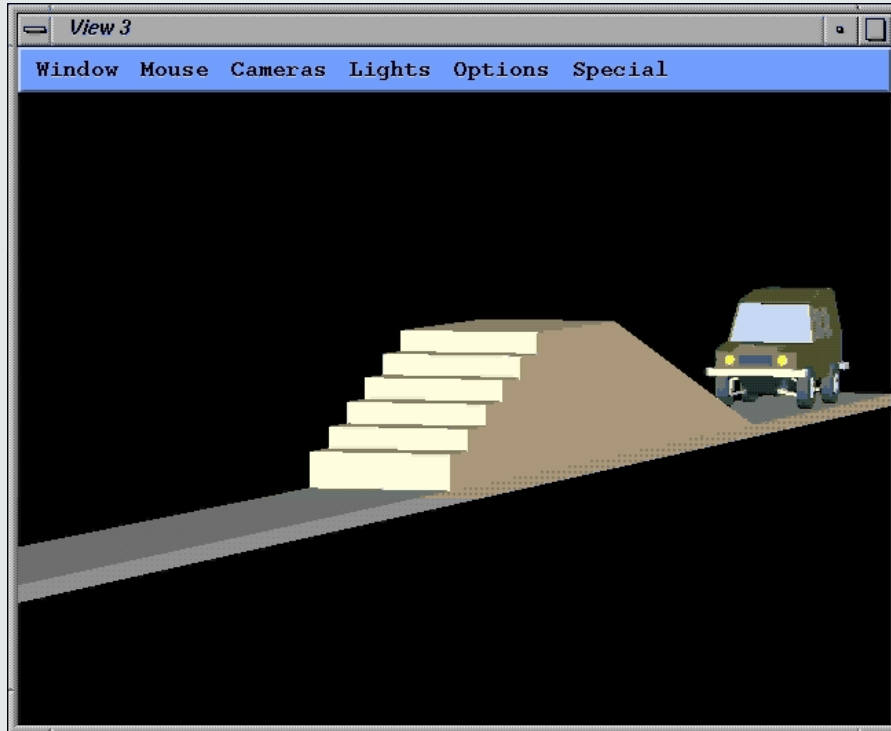
Ejemplo 3: Robot serie



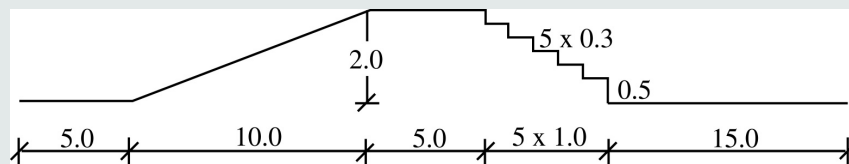
- Simulación de 8 s.
- Cambios de configuración
- Libre: 6 gdl ; Actuando: 3gdl
- Implementación en MATLAB
- Coord: 45 globales / 6 relativas / 6 o 3 gdl

h (s)	Global		Topológico		Híbrido	
	Error	Tiempo	Error	Tiempo	Error	Tiempo
0.01	0.53	6.25	0.26	3.05	0.34	4.02
0.05	3.4	1.92	1.5	1.20	1.8	1.74
0.1	no convergente		3.2	0.78	no convergente	

Ejemplo 4: Vehículo Ittis



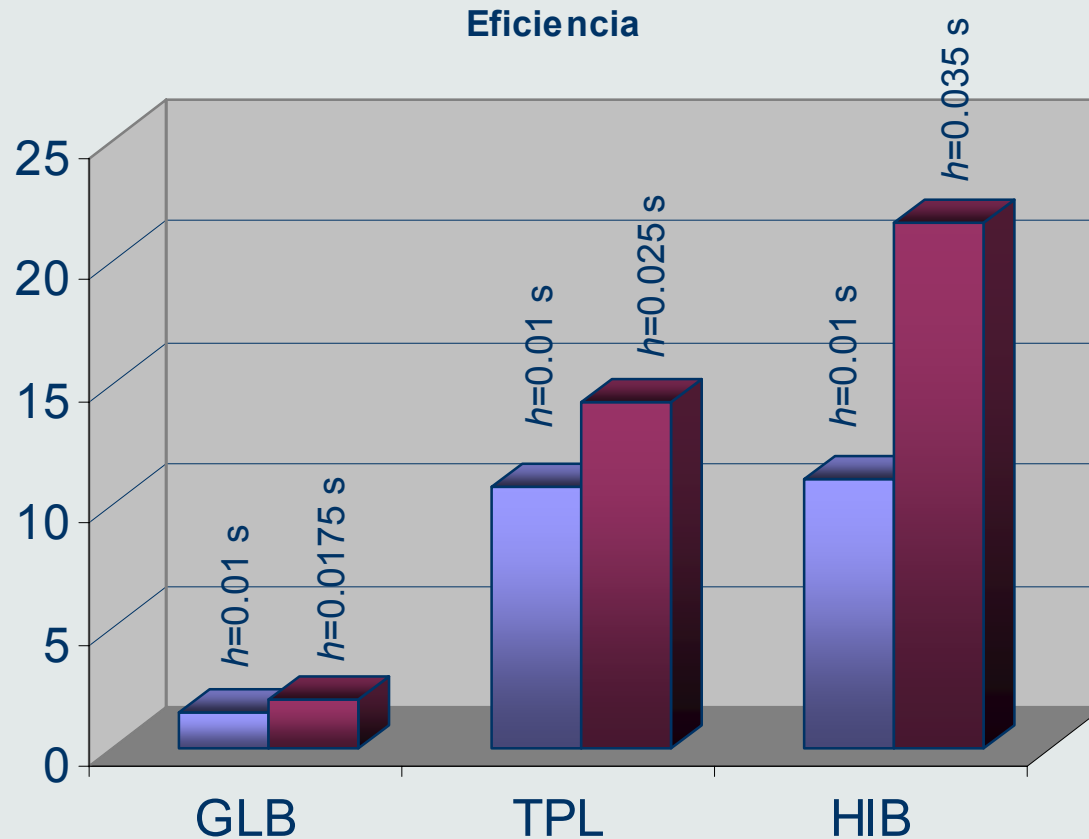
- Simulación de 8 s.
- Velocidad del vehículo 5 m/s
- Picos de aceleración de más de 5 g
- 168 coord. globales
- 26 coord. relativas
- 10 DOF
- Implement. FORTRAN 90
- PC convencional
 - AMD K7 XP1600+ processor (1.4 GHz)



Road profile

Ejemplo 4: Vehículo Itis

- Resultados de la simulación con los distintos métodos



Integradores estructurales

□ ¿Qué debe ser cambiado?

- Forma clásica de las ecuaciones dinámicas

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$



- Forma modificada de las ecuaciones dinámicas

$$(1 - \delta_m) \mathbf{M}_{n+1} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \delta_m \mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_n - (1 - \delta_f) \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_{n+1} - \delta_f \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_n = 0$$

- Regla trapezoidal

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{2}{h} \mathbf{q}_{n+1} + \hat{\mathbf{q}}_n$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{4}{h^2} \mathbf{q}_{n+1} + \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n$$



- Newmark

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{q}_{n+1} + \hat{\mathbf{q}}_n$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{q}_{n+1} + \hat{\ddot{\mathbf{q}}}_n$$

Integradores estructurales

□ Método global

- Residuo y matriz tangente

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \beta h^2 \left[\mathbf{M} \left\{ (1 - \delta_m) \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \delta_m \ddot{\mathbf{q}}_n \right\} + (1 - \delta_f) \left\{ \mathbf{\Phi}_q^T (\alpha \mathbf{\Phi} + \boldsymbol{\lambda}^*) - \mathbf{Q} \right\}_{n+1} + \delta_f \left\{ \mathbf{\Phi}_q^T (\alpha \mathbf{\Phi} + \boldsymbol{\lambda}^*) - \mathbf{Q} \right\}_n \right]$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \cong (1 - \delta_m) \mathbf{M} + (1 - \delta_f) \gamma h \mathbf{C}_{n+1} + (1 - \delta_f) \beta h^2 \left(\mathbf{\Phi}_q^T \alpha \mathbf{\Phi}_q + \mathbf{K} \right)_{n+1}$$

- Proyecciones de velocidades y aceleraciones

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}^* - (1 - \delta_f) \beta h^2 \mathbf{\Phi}_q^T \alpha \mathbf{\Phi}_t \\ \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right] \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}^* - (1 - \delta_f) \beta h^2 \mathbf{\Phi}_q^T \alpha (\dot{\mathbf{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{\Phi}}_t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{P} &= (1 - \delta_m) \mathbf{M} + (1 - \delta_f) \gamma h \mathbf{C}_{n+1} \\ &+ (1 - \delta_f) \beta h^2 \mathbf{K}_{n+1} \end{aligned}$$

Integradores estructurales

□ Método topológico

- Residuo y matriz tangente

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}^i) = \beta h^2 \left\{ (1 - \delta_m) \mathbf{M}_{n+1}^i \ddot{\mathbf{z}}_{n+1}^i + \delta_m \mathbf{M}_n^i \ddot{\mathbf{z}}_n^i - (1 - \delta_f) \mathbf{Q}_{n+1}^i - \delta_f \mathbf{Q}_n^i \right\}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}^i)}{\partial \mathbf{z}^i} \right] = (1 - \delta_m) \mathbf{M}_{n+1}^i + (1 - \delta_f) \gamma h \mathbf{C}_{n+1}^i + (1 - \delta_f) \beta h^2 \mathbf{K}_{n+1}^i$$

- Ausencia de proyecciones

Integradores estructurales

□ Método híbrido

- Residuo y matriz tangente

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \beta h^2 \left[(1 - \delta_m) \mathbf{M}_{n+1}^d \ddot{\mathbf{z}}_{n+1} + \delta_m \mathbf{M}_n^d \ddot{\mathbf{z}}_n + (1 - \delta_f) \left\{ \Phi_{\mathbf{z}}^T (\alpha \Phi + \lambda^*) - \mathbf{Q}^d \right\}_{n+1} + \delta_f \left\{ \Phi_{\mathbf{z}}^T (\alpha \Phi + \lambda^*) - \mathbf{Q}^d \right\}_n \right]$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] = (1 - \delta_m) \mathbf{M}_{n+1}^d + (1 - \delta_f) \gamma h \mathbf{C}_{n+1}^d + (1 - \delta_f) \beta h^2 \left(\Phi_{\mathbf{z}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^d \right)_{n+1}$$

- Proyecciones de velocidades y aceleraciones

$$\left. \begin{array}{l} \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P} \dot{\mathbf{z}}^* \\ \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{P} \ddot{\mathbf{z}}^* - (1 - \delta_f) \beta h^2 \Phi_{\mathbf{z}}^T \alpha \dot{\Phi}_{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{P} = (1 - \delta_m) \mathbf{M}_{n+1}^d + (1 - \delta_f) \gamma h \mathbf{C}_{n+1}^d \\ \quad + (1 - \delta_f) \beta h^2 \mathbf{K}_{n+1}^d \end{array}$$

Integradores estructurales

□ Selección de parámetros

- Cuatro nuevos parámetros: $\delta_m, \delta_f, \gamma, \beta$
- De estudios de estabilidad y precisión:

	Newmark disipativo	HHT	α -Generalizado
Parámetro básico	$\xi \in [-1, 0]$	$\delta_f \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$	$\rho_\infty \in [0, 1]$
δ_m	0	0	$\frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$
δ_f	0	δ_f	$\frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$
γ	$\frac{(1 - 2\xi)}{2}$	$\frac{(1 + 2\delta_f)}{2}$	$\frac{1}{2} - \delta_m + \delta_f$
β	$\frac{(1 - \xi)^2}{4}$	$\frac{(1 + \delta_f)^2}{4}$	$\frac{1}{4}(1 + \delta_f - \delta_m)^2$

Integradores estructurales

□ Barrido bidimensional de simulaciones

- Influencia del integrador en la eficiencia de cada formulación
- Múltiples ejecuciones: extraer conclusiones acerca de las tendencias de cada método (formulación-integrador)

	Newmark disipativo	HHT	α -Generalizado
Parámetro básico	$\xi \in [-1,0]$	$\delta_f \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$	$\rho_\infty \in [0,1]$
Incremento	0.02	0.01	0.02
h (s)	[0.01,0.05]	[0.01,0.05]	[0.01,0.05]
Incremento (s)	0.0025	0.0025	0.0025

Integradores estructurales

□ Consideraciones acerca del error

- Tiempo de CPU guardado para cada simulación
- Error guardado para cada simulación
- Error definido como:

$$error = \frac{1}{(ns + 1)} \sum_{i=0}^{ns} |z_i - z_i^*|$$

- Donde:

- ns es el número de pasos de tiempo
- z_i coordenada vertical de un punto del chasis
- z_i^* coordenada vertical de la solución de referencia

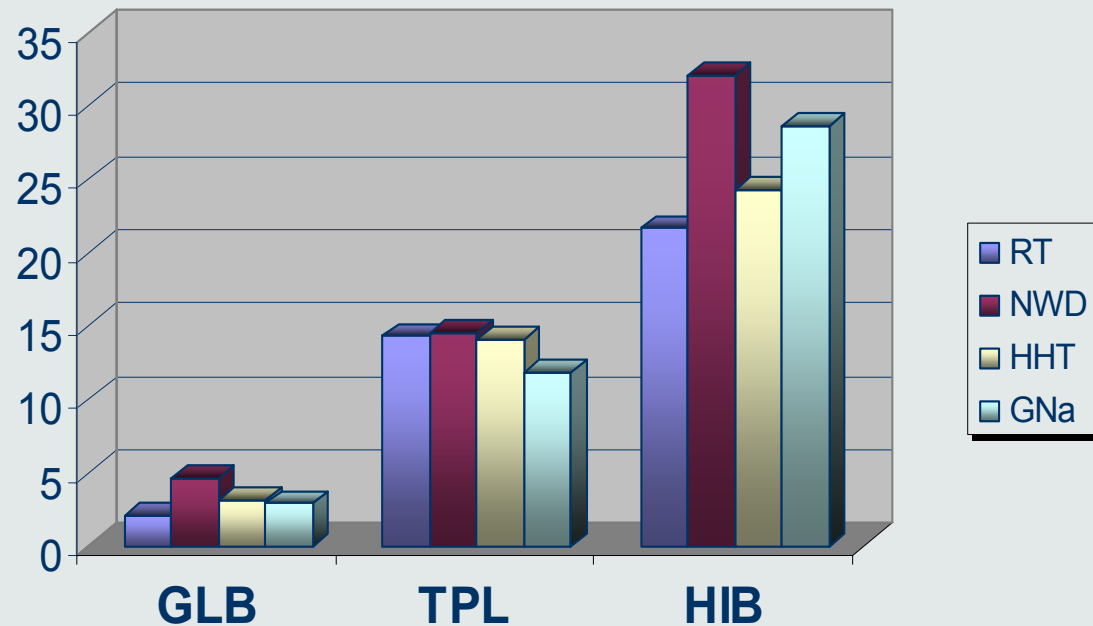
□ Pruebas efectuadas

- Análisis eficiencia-robustez
- Análisis eficiencia-precisión

Integradores estructurales

- Análisis eficiencia-robustez: dinámica del vehículo ILTIS
 - Límite de paso de tiempo: 0.05 s.

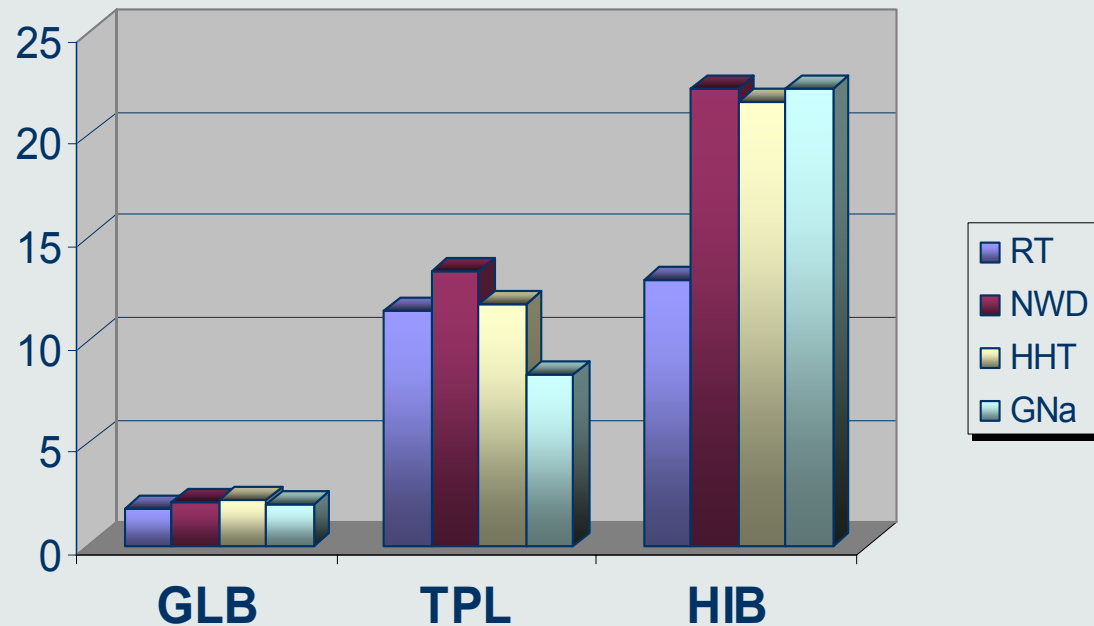
Eficiencia-robustez



Integradores estructurales

- Análisis eficiencia-precisión: dinámica del vehículo ILTIS
 - Umbral de error: $4 \cdot 10^{-2}$ m.

Eficiencia-precisión



Integradores IRK

- ✓ Ampliamente estudiados y usados con ODE
- ✓ Ampla variedad de comportamientos
- ✓ Diseñados para sistemas de primer orden

- ✓ Tradicionalmente empleados
- ✓ Fáciles de usar
- ✓ Malas prop. de estabilidad (sist. *stiff*)

- ✓ Complejos de implementar
- ✓ Buena precisión con pocas etapas
- ✓ Aptos para sistemas *stiff*
- ✓ Muy pesados computacionalmente

- ✓ Más simples y menos pesados que los IRK generales
- ✓ Mejor comportamiento que los ERK
- ✓ Los mejores para aplicaciones de tiempo real

Integradores IRK

□ Forma general de los SDIRK

- Sistema ODE general $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}); \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_s \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ a_{21} \mathbf{I}_n & \gamma \mathbf{I}_n & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} \mathbf{I}_n & a_{s2} \mathbf{I}_n & \cdots & \gamma \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t_0 + c_1 h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_1) \\ \mathbf{f}(t_0 + c_2 h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t_0 + c_s h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}_s) \end{pmatrix} = h \mathbf{A} \hat{\mathbf{f}}$$

$$\mathbf{y}_f = \mathbf{y}_0 + h \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{b}^T = (b_1 \mathbf{I}_n \quad b_2 \mathbf{I}_n \quad \cdots \quad b_s \mathbf{I}_n)$$

Integradores IRK

- ❑ Compromiso entre coste computacional, precisión y estabilidad
- ❑ Tiempo real: integradores de 2 etapas
- ❑ Elección de coeficientes b_i , c_i , a_{ij} para obtener:
 - Máximo orden posible \rightarrow 3^o orden
 - Mejores propiedades de estabilidad \rightarrow A-estabilidad

$c_1 = \gamma$	$a_{11} = \gamma$	$a_{12} = 0$
$c_2 = 1 - \gamma$	$a_{21} = 1 - 2\gamma$	$a_{22} = \gamma$
	$b_1 = 1/2$	$b_2 = 1/2$

$$\gamma = (3 + \sqrt{3})/6$$

Integradores IRK

□ Ecuaciones del movimiento: global e híbrida

- Lagrange aumentado en index-3 con proyecciones

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}^* + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_i^* + \alpha \Phi_{i+1}$$

- Estructurales encajan en esta formulación: velocidades y aceleraciones como función de las posiciones
- SDIRK no encajan en esta formulación

□ Ecuaciones del movimiento: formulación topológica

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

- Sistema de ecuaciones ODE
- SDIRK encajan en esta formulación

Integradores IRK

□ Ecuaciones del movimiento: global e híbrida

- Lagrange aumentado en index-1 con proyecciones

$$\left(\mathbf{M} + \Phi_q^T \alpha \Phi_q\right) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \Phi_q^T \alpha \left(\dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_t\right) - \Phi_q^T \lambda^*$$

$$\lambda_{i+1}^* = \lambda_i^* + \alpha \ddot{\Phi}_{i+1}$$

- SDIRK encajan en esta formulación

□ Ecuaciones del movimiento: formulación topológica

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

- Sistema de ecuaciones ODE
- SDIRK encajan en esta formulación

Integradores IRK

□ Ecuaciones finales de las etapas

- Métodos global e híbrido

$$\left[\mathbf{M} + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha \mathbf{\Phi}_q + \gamma h \left(\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha \dot{\mathbf{\Phi}}_q \right) + (\gamma h)^2 \mathbf{K} \right] \Delta \mathbf{z}_i^{\dot{q}} = \mathbf{e}_i^{\dot{q}} - \gamma h \mathbf{K} \mathbf{e}_i^q$$

$$\Delta \mathbf{z}_i^q = \mathbf{e}_i^q + \gamma h \Delta \mathbf{z}_i^{\dot{q}}$$

- Siendo:

$$\mathbf{e}_i^q = -\mathbf{z}_i^q + h \sum_{j=1}^i a_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Delta \mathbf{z}_j^{\dot{q}}$$

$$\mathbf{e}_i^{\dot{q}} = -\left(\mathbf{M} + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha \mathbf{\Phi}_q \right) \left(\mathbf{z}_i^{\dot{q}} - h \sum_{j=1}^i a_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j \right) - h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \left(\mathbf{K} \Delta \mathbf{z}_j^q + \left(\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}_q^T \alpha \dot{\mathbf{\Phi}}_q \right) \Delta \mathbf{z}_j^{\dot{q}} \right)$$

Integradores IRK

□ Ecuaciones finales de las etapas

- Método topológico

$$\left[\mathbf{M}^i + \gamma h \mathbf{C}^i + (\gamma h)^2 \mathbf{K}^i \right] \Delta \mathbf{z}_i^{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{e}_i^{\dot{\mathbf{q}}} - \gamma h \mathbf{K} \mathbf{e}_i^{\mathbf{q}}$$

$$\Delta \mathbf{z}_i^{\mathbf{q}} = \mathbf{e}_i^{\mathbf{q}} + \gamma h \Delta \mathbf{z}_i^{\dot{\mathbf{q}}}$$

- Siendo:

$$\mathbf{e}_i^{\mathbf{q}} = -\mathbf{z}_i^{\mathbf{q}} + h \sum_{j=1}^i a_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \Delta \mathbf{z}_j^{\dot{\mathbf{q}}}$$

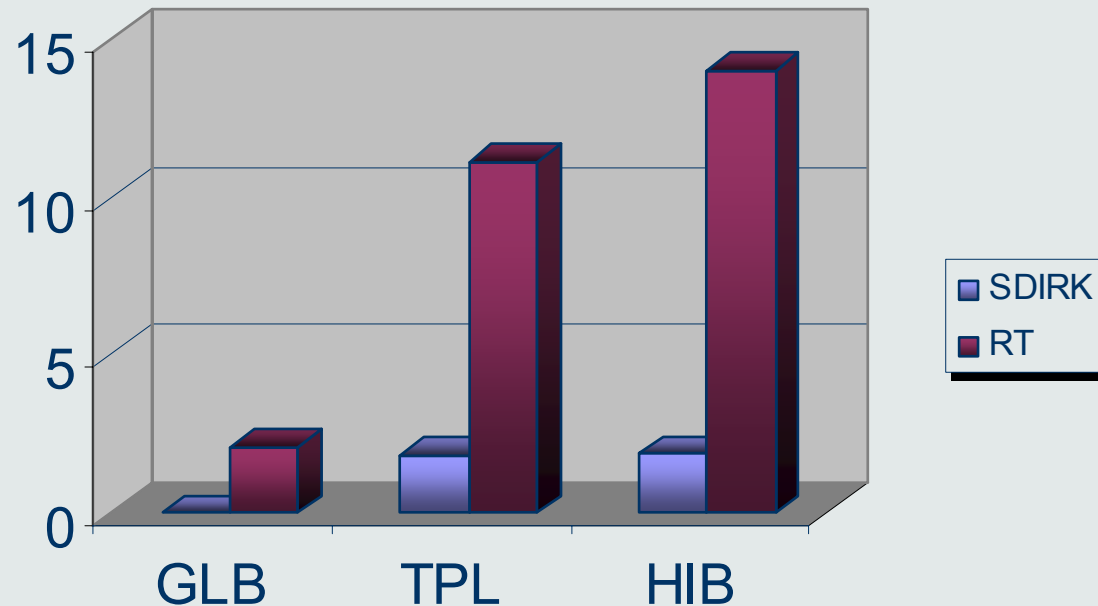
$$\mathbf{e}_i^{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^i \left(\mathbf{z}_i^{\dot{\mathbf{q}}} - h \sum_{j=1}^i a_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j \right) - h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \left(\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{z}_j^{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^i \Delta \mathbf{z}_j^{\dot{\mathbf{q}}} \right)$$

Integradores IRK

□ Ejemplo numérico: dinámica del vehículo ILTIS

- SDIRK frente a RT
- Pasos de tiempo alcanzados
 - Global
 - SDIRK: 10^{-4}
 - RT: $1.75 \cdot 10^{-2}$
 - Topológico
 - SDIRK: 10^{-2}
 - RT: $2.5 \cdot 10^{-2}$
 - Híbrido
 - SDIRK: $7.5 \cdot 10^{-3}$
 - RT: $3.5 \cdot 10^{-2}$

Eficiencia



Conclusiones

□ Acerca de los métodos:

- Global con RT: sistemas pequeños (50 variables)
- Híbrido con NWD: sistemas grandes (100 variables)
- Global e híbrido: sistemas con posiciones singulares, configuraciones cambiantes o sistemas con gdl difícilmente identificables

□ Acerca de los integradores:

- Métodos global e híbrido se benefician del empleo de integradores con disipación numérica
- Todos los integradores son fácilmente adaptables al método topológico (coordenadas independientes)
- Adaptación a los métodos global e híbrido mucho más complicada en IRK
- IRK incompatibles con los esquemas en index-3
- IRK no son competitivos con los estructurales para tiempo real

Futuras líneas de investigación

- ❑ Extensión del estudio a los nuevos integradores conservativos-disipativos
- ❑ Análisis del efecto estabilizador de las proyecciones frente al proporcionado por los integradores conservativos-disipativos
 - Eficiencia, robustez, precisión...
- ❑ Selección automática del penalizador utilizado en las formulaciones global e híbrida
- ❑ Selección automática de los parámetros de los integradores estructurales
- ❑ Estimación del error en integradores estructurales
- ❑ Extensión y análisis de la formulación híbrida con mecanismos flexibles

Publicaciones derivadas

□ Publicaciones en revista internacional

- **A Combined Penalty and Recursive Real-Time Formulation for Multibody Dynamics**

Autores: J.Cuadrado, D.Dopico, M.Gonzalez and M.A.Naya

Revista: Journal of Mechanical Design, vol.126, Issue 4, pp.602-608

- **Penalty, Semi-Recursive and Hybrid Methods for MBS Real-Time Dynamics in the Context of Structural Integrators**

Autores: J.Cuadrado, D.Dopico, M.A.Naya and M.Gonzalez

Revista: Multibody System Dynamics, vol.12, Issue 2, pp.117-132

- **On the Aptitude of IRK Integrators for the Real-Time Dynamics of Multibody Systems**

Autores: D.Dopico, U.Lugris, M.Gonzalez and J.Cuadrado

Revista: Int. Jnl. For Numerical Methods in Engineering (en revisión)

Publicaciones derivadas

□ Comunicaciones en congresos

- **Método híbrido topológico-global para la dinámica de sistemas mecánicos multicuerpo.** *J.Cuadrado y D.Dopico*
XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. Cádiz, España, 2002-12
- **Penalty, Semi-Recursive and Hybrid Methods for MBS Real-Time Dynamics in the Context of Structural Integrators.** *J.Cuadrado and D.Dopico*
Multibody Dynamics 2003. Lisboa, Portugal, 2003-07
- **A Hybrid Global-Topological Real-Time Formulation for Multibody Systems.** *J.Cuadrado and D.Dopico*
ASME Desing Engineering Technical Conferences. Chicago (Illinois), USA, 2003-09
- **A Combined Penalty and Semi-Recursive Formulation for Closed-Loops in MBS.** *J.Cuadrado and D.Dopico*
XI World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Tianjin, China, 2004-04

Publicaciones derivadas

□ Comunicaciones en congresos

- **IRK vs Structural Integrators for Real-Time Applications in MBS.** *D.Dopico and J.Cuadrado*

2nd Asian Conference on Multibody Dynamics 2004. Seúl, Corea, 2004-08

- **Comportamiento de integradores estructurales y Runge-Kutta implícitos en la dinámica en tiempo real de sistemas multicuerpo.** *Daniel Dopico, Urbano Lugrís, Javier Cuadrado*

XVI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica. León, España, 2004-12
(A celebrar)