Método híbrido topológico-global para la dinámica de sistemas mecánicos multicuerpo

J. Cuadrado, D. Dopico

Escuela Politécnica Superior, Mendizábal s/n, 15403 Ferrol
Tel: 981337400, Fax: 981337410, E-mail: javicuad@cdf.udc.es

Resumen
Las cada vez mayores prestaciones de los ordenadores personales, hacen posible la simulación dinámica en tiempo real del movimiento de sistemas mecánicos multicuerpo complejos, tales como el modelo completo de un vehículo automóvil, en un PC convencional de 1.200 €, si se dispone de la formulación adecuada. Existen dos grandes familias de formulaciones dinámicas según el tipo de coordenadas que utilizan en la modelización del sistema: globales y topológicas. Las primeras conducen a una programación sencilla y sistemática, mientras que las segundas son muy eficientes. En este trabajo se presenta una formulación híbrida, resultado de combinar la más eficiente de las globales con la más automatizable de las topológicas. De esta forma, se consigue una formulación que trata de aunar sencillez de programación y eficiencia. Para comprobar las mejoras que supone la nueva formulación sobre sus predecesoras, se comparan los resultados de analizar dos ejemplos con las tres formulaciones: un caso 2D que atraviesa una posición singular, y un caso 3D con comportamiento *stiff*.

Palabras Clave: simulación, dinámica, máquinas, mecanismos, tiempo real

Abstract
The continuously improved performance of personal computers enables the real-time motion simulation of complex multi-body systems, such as the whole model of an automobile, on a conventional $1,200 PC, provided the adequate formulation is applied. There exist two big families of dynamic formulations, depending on the type of coordinates they use to model the system: global and topological. The former leads to a simple and systematic programming while the latter is very efficient. In this work, a hybrid formulation is presented, obtained by combination of the most efficient global formulation and the most systematic topological formulation. In this way, it is developed a new formulation which shows, at the same time, easiness of implementation and a high level of efficiency. In order to verify the advantages that the new formulation has over its predecessors, the analysis of two examples is carried out using the three formulations and the corresponding results are compared: a planar case which goes through a singular position, and a 3D case with stiff behaviour.

Keywords: simulation, dynamics, multi-body systems, real-time.

1. Introducción

Hasta hace poco tiempo, la simulación dinámica en tiempo real de sistemas mecánicos multicuerpo complejos no era objetivo fácil de alcanzar. No sólo era necesario recurrir a las formulaciones más rápidas, sino también a plataformas muy poderosas, normalmente estaciones de trabajo de precio muy elevado (por encima de 30.000 €).

Hoy en día, merced a la espectacular mejora que han experimentado los ordenadores personales en sus prestaciones, tanto a nivel de cálculo como de gráficos, es perfectamente posible alcanzar el tiempo real en la simulación dinámica de tales sistemas complejos como, por ejemplo, el modelo completo de un vehículo automóvil. Y ello, con un PC que puede costar unos 1.200 €. Sin embargo, el campo de la simulación dinámica de sistemas mecánicos multicuerpo evoluciona sin cesar y, si hace unos años el objetivo era simplemente simular el movimiento de un sistema compuesto por sólidos modelizados como rígidos, hoy se va más allá, y se pretende poder considerar en las simulaciones algunos sólidos flexibles, o efectos de contacto e impacto, por poner algunos ejemplos. Se precisa por tanto disponer de formulaciones muy eficientes, capaces de reducir al máximo el tiempo de cálculo necesario, de manera que puedan ser abordables esas simulaciones de sistemas complejos modelizados de una manera realista.

Yendo ya a las formulaciones dinámicas existentes, se pueden agrupar en dos grandes familias: globales y topológicas [1, 2].

Las formulaciones globales se caracterizan por utilizar en la modelización del mecanismo un tipo de coordenadas que define perfectamente a cada sólido. Debido a este hecho, los términos propiamente dinámicos (fuerzas aplicadas y de inercia) pueden calcularse independientemente para cada sólido, y posteriormente ensamblarse para formar los correspondientes términos del conjunto del mecanismo. Por su parte, los términos cinemáticos (ecuaciones de restricción que ligan las variables) se establecen de manera sistemática para cada sólido y para cada par cinemático. Como consecuencia, esta familia de métodos conduce a algoritmos sencillos y generales, fáciles por tanto de implementar para cualquier ejemplo, pero no muy eficientes.

Las formulaciones topológicas emplean coordenadas relativas o de par para modelizar el mecanismo, de manera que cada sólido queda definido respecto al anterior en la cadena cinemática. Ello invita a aprovechar la topología de la propia cadena para establecer algoritmos en los que, tanto los términos cinemáticos como los dinámicos, sean calculados en base a eficientes procedimientos recursivos. Sin embargo, estas formulaciones suelen ser complicadas y su generalización difícil.

El objetivo de este trabajo es obtener una formulación híbrida como combinación de una global y una topológica, de forma que se mantengan las ventajas de ambos tipos de formulaciones, esto es, eficiencia y sencillez de programación, evitando los inconvenientes inherentes a las mismas.

2. Formulaciones de partida

Clave del éxito final será sin duda la adecuada selección de las formulaciones de partida. Se ha dicho ya que las formulaciones globales muestran escasa eficiencia, mientras que las topológicas son difícilmente automatizables para su implementación general. Se va a seleccionar, por tanto, la formulación de cada familia que sufra las desventajas típicas de su clase en la menor medida posible.

Como método global se ha elegido el descrito en [3], que utiliza coordenadas naturales (globales y dependientes) en la modelización del sistema multicuerpo. Consiste en una formulación Lagrangiana aumentada de índice 3 que se combina con la regla trapezoidal como integrador, conduciendo a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal con las posiciones dependientes como incógnitas, que se resuelve según un esquema de iterativo de Newton-Raphson. Una vez alcanzada la convergencia en el paso de tiempo, se procede a la proyección (limpieza) de velocidades y aceleraciones antes de pasar al paso de tiempo siguiente. El resultado es un algoritmo eficiente y robusto.

Como método topológico se ha optado por el denominado en [4] semi-recursivo, que emplea un doble sistema de coordenadas en la modelización: seis coordenadas (tres traslaciones y tres rotaciones) para cada sólido y el conjunto de coordenadas relativas. Plantea las ecuaciones dinámicas en las coordenadas de sólidos, y mediante proyección de velocidades llega a un sistema de ecuaciones del movimiento en coordenadas relativas, aplicando una técnica recursiva que acumula fuerzas e inercias. Si hay cadenas cerradas, el método utiliza una segunda proyección de velocidades para llegar a un sistema de ecuaciones en coordenadas independientes, que sufre los problemas típicos de esta técnica: rango de validez de las coordenadas independientes elegidas y falta de robustez ante posiciones singulares. Para evitar diferencias a causa del esquema de integración, se recurre a un procedimiento idéntico al utilizado en el método global: se combinan las ecuaciones del integrador, que es la regla trapezoidal, con las ecuaciones

del movimiento, llegando a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal con las posiciones independientes como incógnitas, que se resuelve por el método iterativo de Newton-Raphson. El algoritmo resultante es sencillo y generalizable.

3. Formulación híbrida

La formulación híbrida utiliza, al igual que el método topológico, el doble sistema de coordenadas en la modelización del mecanismo. Sin embargo, plantea el esquema general del método global, esto es, formulación Lagrangiana aumentada de índice 3, si bien ahora, para calcular los términos dinámicos implicados (matriz de masas, vector de fuerzas aplicadas y de inercia) utiliza la técnica recursiva de acumulación de fuerzas e inercias propia del método topológico. Como esquema de integración se repite el ya descrito en los dos métodos de partida. Tras alcanzarse la convergencia en el paso de tiempo se procede, al igual que ocurría en el método global, a la proyección de velocidades y aceleraciones.

Las ventajas del nuevo método son:

• Respecto al método global: aunque el planteamiento general de las ecuaciones dinámicas es el mismo, el tamaño del problema es mucho menor, pues se refiere a coordenadas relativas en lugar de a coordenadas naturales, lo que ha de redundar en una mayor eficiencia.

• Respecto al método topológico: se evita la segunda proyección de velocidades requerida para cadenas cerradas, sustituyéndola por el esquema Lagrangiano aumentado de índice 3, lo que ha de implicar una enorme mejora en robustez.

4. Ejemplos

Para poner de manifiesto los beneficios de la nueva formulación híbrida, se han resuelto dos ejemplos.

El primer ejemplo es un caso plano. Se trata del doble cuadrilátero articulado que aparece en la Figura 1. Cuando el mecanismo atraviesa la posición horizontal, el número de grados de libertad pasa repentinamente de 1 a 3. Se trata de una posición singular. Todas las barras tienen masa (uniformemente distribuida) y longitud unidad. El sistema sufre la acción de la gravedad. En el instante inicial, las barras articuladas al

suelo se hallan verticales y hacia arriba, comunicándoseles una velocidad angular unitaria entrante.

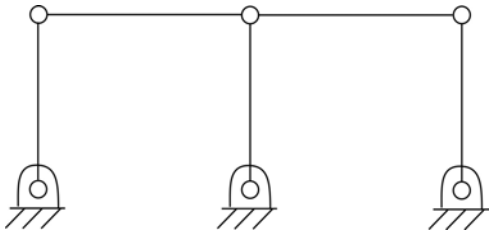

Figura 1. *Doble cuadrilátero articulado.*

La simulación dura 10 segundos, durante los cuales se atraviesa la posición singular en diez ocasiones. La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos con los tres métodos para distintos pasos de tiempo (*dt*). El error hace referencia a la máxima desviación, en Julios, que sufre la energía mecánica del sistema. El tiempo es el tiempo de ordenador, en segundos, requerido para la simulación.

Tabla 1. *Resultados del doble cuadrilátero articulado.*

	Global		**Topológico**		**Híbrido**	
dt	*Error*	*Tiempo*	*Error*	*Tiempo*	*Error*	*Tiempo*
0.01	-0.2052	0.86	No converge		-0.0142	3.20
0.03	-0.8280	0.37	No converge		-0.1227	1.32
0.05	-9.0342	0.26	No converge		-0.3410	0.83
0.1	Malos resultados		No converge		-1.3425	0.52

Se observa, en primer lugar, que el método topológico no es capaz de completar la integración. Ello se debe a la segunda proyección de velocidades, que no se puede efectuar en la singularidad. Se observa también que el método global es más eficiente que el híbrido para un mismo paso de tiempo, mientras que el híbrido se muestra más preciso y robusto, pues presenta menos error para un mismo paso de tiempo, y además funciona en pasos de tiempo para los que el método global proporciona malos resultados. Por tanto, si se compara la eficiencia de ambos métodos para un mismo nivel de error, se ve que los tiempos de cálculo no serían muy diferentes. Hay que tener en cuenta, además, que, en este ejemplo, el número de coordenadas globales es 6, mientras que el número de relativas es 5. No es por ello un ejemplo en el que el método híbrido pueda sacar ventaja de manejar un número muy inferior de variables respecto al global (lo que sí ocurrirá en casos grandes).

El segundo ejemplo es un caso tridimensional. Se trata de la suspensión de un vehículo todo-terreno [5] que se muestra en la Figura 2.

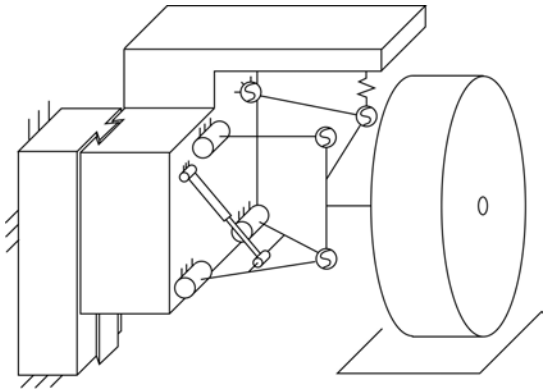

Figura 2. *Suspensión de vehículo todo-terreno.*

La suspensión parte del reposo en su posición nominal, que no corresponde al equilibrio. Vibra libremente hasta alcanzarlo y, transcurridos 3 segundos, pasa sobre un escalón de 10 cm de caída, a una velocidad de 5 m/s, tras lo cual vibra de nuevo libremente hasta alcanzar el equilibrio. El análisis completo dura 7 segundos. Los resultados se recogen en la Tabla 2, donde el error es la diferencia, en Julios, entre la energía potencial perdida y la energía disipada por el amortiguador.

Tabla 2. *Resultados de la suspensión de vehículo todo-terreno.*

	Global		**Topológico**		**Híbrido**	
dt	*Error*	*Tiempo*	*Error*	*Tiempo*	*Error*	*Tiempo*
0.001	-43.13	18.0	-43.49	59.3	-42.05	48.0
0.01	-43.45	1.96	-44.06	7.87	-42.80	5.97
0.03	-57.96	0.86	No converge		No converge	

Este caso, a diferencia del anterior, posee un comportamiento *stiff*, ya que el bloque que representa una cuarta parte del vehículo tiene gran masa, y por lo tanto su movimiento es de baja frecuencia, mientras que la rueda tiene poca masa, y su movimiento es de frecuencia elevada. Pues bien, se observa, en primer lugar, que el método topológico es el menos robusto y eficiente. Se ve también que, ante un caso *stiff*, el método global es menos preciso pero más robusto que el híbrido, pues llega a funcionar en pasos mayores. En lo que se refiere a la eficiencia, el global mantiene la misma proporción ventajosa respecto al híbrido que en el ejemplo anterior, si bien de nuevo el caso no es demasiado favorable al método híbrido, ya que se han utilizado 25 coordenadas globales

frente a 8 relativas. Es de suponer que se precisan muchas más variables para que el método global comience a requerir un esfuerzo de cálculo notable en la resolución del sistema de ecuaciones.

5. Conclusiones

Las conclusiones que se extraen de los ejemplos analizados son las siguientes:

• El método híbrido es más robusto, preciso y eficiente que el topológico de partida.

• El método híbrido es más preciso que el global de partida. En casos no *stiff* es también más robusto, pero lo es menos en casos *stiff*.

• El método híbrido es menos eficiente que el global de partida, para idéntico paso de tiempo, en problemas con un número de variables globales reducido. Es probable que dicha tendencia se invierta al aumentar el tamaño del problema.

6. Referencias

1. A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems,* Cambridge University Press, Cambridge, (1998).
2. J. García de Jalón, E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*, Springer-Verlag, New York, (1994).
3. J. Cuadrado, R. Gutiérrez, M. A. Naya, P. Morer, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering,* **Vol.**(51) (2001) 1033.
4. J. I. Rodríguez, *Análisis Eficiente de Mecanismos 3D con Métodos Topológicos y Tecnología de Componentes en Internet,* Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastián, (2000).
5. Iltis Data Package, IAVSD Workshop, Herbertov, Czechoslovakia, (1990).

7. Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el contexto del proyecto DPI2000-0379, financiado por la CICYT, y del incentivo al mismo PGIDT01PXI16601PN aportado por la Secretaría General de I+D de la Xunta de Galicia.