

INFLUENCIA DE LA MODELIZACIÓN Y DE LOS PARÁMETROS NUMÉRICOS SOBRE UNA FORMULACIÓN PARA EL ANÁLISIS EFICIENTE DE SISTEMAS MULTICUERPO FLEXIBLES

Ruth Gutiérrez y Javier Cuadrado

Universidad de A Coruña
Escuela Politécnica Superior, C/ Esteiro s/n, 15403 Ferrol, España.
e-mail: rutgut@udc.es, web <http://lim.ii.udc.es>

Palabras clave: Sistemas Multicuerpo, Flexibilidad, Sistema de Referencia Móvil, Modos Estáticos y Dinámicos, Selección modal, Factor de Participación Modal.

Resumen. *Durante los últimos años, los autores han desarrollado un método preciso, robusto, eficiente y de fácil implementación, para el análisis en tiempo real de sistemas multicuerpo con componentes rígidos y flexibles. El empleo de este método deja a criterio del analista la selección de cuatro parámetros, dos de modelización y dos numéricos.*

La flexibilidad de los sólidos se introduce mediante la aproximación de sistema de referencia móvil, utilizando el método de superposición modal, con modos estáticos y dinámicos, que se determinan en una fase de preproceso. El número de modos dinámicos es el primer parámetro de modelización. Para simplificar los términos inerciales asociados con los componentes flexibles se emplea la aproximación co-rotacional, lo que provoca que, dichos términos, dependan de la discretización efectuada sobre el componente flexible. Así, el segundo parámetro de modelización es el tamaño de elemento. Además, existen otros dos parámetros numéricos a seleccionar: el factor de penalización, necesario para el planteamiento de las ecuaciones del movimiento con la formulación lagrangiana aumentada, y el paso de tiempo, para la integración de dichas ecuaciones dinámicas.

En este artículo se estudia la influencia de estos cuatro parámetros en la precisión y eficiencia del método. Para ello, se realiza un barrido del espacio generado por estos parámetros sobre un sistema flexible, y se analizan los resultados en términos de precisión y eficiencia.

1. INTRODUCCION

Durante los últimos años, los autores han desarrollado un método preciso, robusto, eficiente y de fácil implementación, para el análisis en tiempo real de sistemas multicuerpo con componentes rígidos y flexibles [1, 2]. Las características principales del método son: el empleo de coordenadas naturales para la modelización [3], el uso de la aproximación co-rotacional [4] para simplificar los términos inerciales asociados a los componentes flexibles, el establecimiento de las ecuaciones del movimiento con una formulación lagrangiana aumentada en índice 3 con proyecciones de velocidad y aceleración [5], y su integración numérica mediante un método implícito de paso simple, la regla trapezoidal [6]. Para introducir la flexibilidad de los sólidos se emplea la aproximación de sistema de referencia móvil [7], utilizando el método de superposición modal para describir las deformaciones locales [8], con modos estáticos y dinámicos definidos en un sistema de referencia tangente [9].

Cuando se emplea este método para el análisis de sistemas multicuerpo con elementos flexibles, hay cuatro parámetros, dos de modelización y dos numéricos, que se dejan a criterio del analista:

- a) El número de modos dinámicos que se consideran para cada componente flexible. La modelización de un sistema multicuerpo completo mediante coordenadas naturales establece automáticamente el número de modos estáticos a emplear en la modelización de los componentes flexibles [1], aunque cualquiera de ellos puede ser despreciado imponiendo la ecuación de restricción de amplitud nula. La introducción de modos dinámicos tiene como objetivo la mejora de la representación del campo de deformaciones dado por los estáticos. Así, el número de modos dinámicos que se pueden introducir es arbitrario y queda a criterio del analista. Como se puede observar en la literatura [10, 11], la precisión y la eficiencia de una simulación está fuertemente influenciada por esta decisión.
- b) En una aproximación general, el análisis de sistemas multicuerpo con elementos flexibles obliga a generar un modelo de elementos finitos (EF) de cada componente flexible que, en una etapa de preproceso, permita la obtención de los modos estáticos y dinámicos de deformación, así como las matrices de masa y rigidez del ensamblaje de EF, y, en una etapa de postproceso realizada en cada paso de tiempo, permita la obtención de los valores de desplazamientos elásticos, deformaciones y tensiones. El tamaño de elemento empleado en la discretización de un componente flexible puede afectar tanto a la precisión como a la eficiencia de la simulación. Cuando se consideran cuerpos flexibles de geometría simple, como vigas rectas de sección constante, se dispone de la forma analítica de los modos de deformación. Así, las etapas de pre y postproceso descritas dejan de ser necesarias, y el comportamiento de la simulación ya no depende de la malla de EF. Sin embargo, cuando se emplea la formulación de los autores con este tipo de componente flexible, el modelo de EF sigue influyendo en la simulación. Ello es debido al empleo de la aproximación co-rotacional para simplificar los términos de inercia asociados con los elementos

flexibles, que obliga a la realización de varios productos matriciales que involucran a la matriz modal. Así, aunque se disponga de las funciones analíticas de las deformadas modales dinámicas, la discretización adoptada afecta al rendimiento de la simulación. El número de elementos de esta discretización es la segunda decisión dejada a criterio del analista.

- c) En el método propuesto, las ecuaciones del movimiento se establecen mediante la formulación aumentada de Lagrange en índice 3, que requiere un factor de penalización para amplificar las fuerzas internas causadas por la violación de restricciones. Este factor es crucial para la estabilidad de la simulación y constituye la tercera decisión para el analista.
- d) Como el método descrito está dirigido a la simulación en tiempo real de mecanismos con componentes flexibles, para la integración numérica se emplea un método implícito de paso fijo, la regla trapezoidal. El paso de tiempo es la cuarta decisión del analista en este tipo de simulaciones.

El objetivo de este artículo es estudiar la influencia que estos cuatro parámetros tienen en la eficiencia y en la precisión del método propuesto, y buscar las relaciones entre ellos. Para conseguirlo, se lleva a cabo un barrido del espacio generado por los dos parámetros de modelización para un sistema flexible, y se ajustan los parámetros numéricos para cada combinación. Los resultados se analizan en términos de precisión y eficiencia. Para tener una solución de referencia, se resuelve el ejemplo con el módulo no lineal de un programa comercial de elementos finitos.

El resto del artículo se organiza de la siguiente manera: la Sección 2 muestra el sistema flexible que se va a analizar y la modelización efectuada para el análisis con el método propuesto y con el programa comercial de EF; la Sección 3 explica las características del movimiento sufrido por el sistema, los criterios para generar las múltiples simulaciones ejecutadas, las magnitudes a registrar, y la manera de determinar el error de cada simulación; la Sección 4 presenta los resultados obtenidos en todas las simulaciones, resultados que se discuten en la Sección 5; finalmente, la Sección 6 resume las conclusiones del trabajo.

2. EJEMPLO

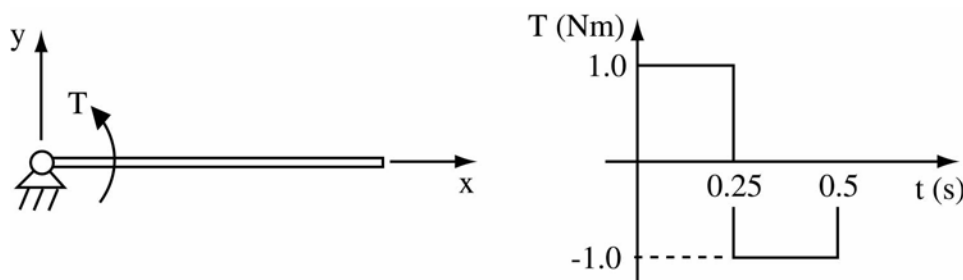


Figura 1. a) Viga articulada-libre; b) Par variable.

El sistema flexible que va a ser analizado se muestra en la Figura 1a. Se trata de una viga articulada a un punto fijo en uno de sus extremos, sobre el que se aplica el par variable

mostrado en la Figura 1b. Se desprecian los efectos de la gravedad. Las propiedades físicas de la viga son: densidad 8000 Kg/m^3 , módulo de elasticidad $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, longitud 1.5 m , área 10^{-4} m^2 , momento de inercia geométrico 10^{-10} m^4 .

La modelización del sistema mediante el método desarrollado por los autores se muestra en la Figura 2. En la articulación fija de la barra se sitúa la base formada por el punto $\mathbf{p1}$ y los vectores $\mathbf{v1}$ y $\mathbf{v2}$. En este caso, el punto $\mathbf{p1}$ es fijo. En el otro extremo de la barra se define el punto $\mathbf{p2}$. El desplazamiento local unitario del punto $\mathbf{p2}$ en la dirección $\mathbf{v2}$ da lugar al modo de deformación estático Φ . Se ha restringido el desplazamiento local en la dirección $\mathbf{v1}$ mediante una ecuación de restricción, para evitar introducir el modo estático axial de deformación, que no influye en este ejemplo. Además, para representar con más exactitud la configuración deformada de la barra se añaden tantos modos dinámicos de deformación como se desee: son los modos naturales de vibración de la barra con las fronteras fijas (puntos $\mathbf{p1}$ y $\mathbf{p2}$ y vectores unitarios $\mathbf{v1}$ y $\mathbf{v2}$), es decir, el extremo izquierdo empotrado y el extremo derecho articulado. La Figura 2 muestra los dos primeros modos dinámicos Ψ_1 y Ψ_2 .

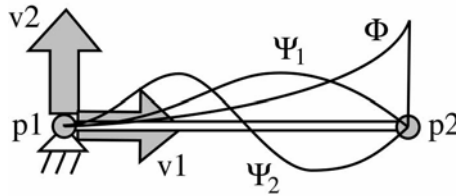


Figura 2. Modelización de una viga articulada flexible con el método de los autores.

Elegidos un número n de modos dinámicos, el vector de variables del problema es,

$$\mathbf{q}^t = \{v1_x \ v1_y \ v2_x \ v2_y \ \eta \ \xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n \ p2_x \ p2_y\} \quad (1)$$

donde η es la amplitud del modo estático de deformación Φ , y $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son las amplitudes de los modos dinámicos considerados $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$. Así, el número total de variables es $7+n$, con solo $2+n$ independientes. Se ha empleado la forma analítica de los modos estáticos y dinámicos.

El modelo de EF de la viga se ha realizado empleando una malla de m elementos viga plana (BEAM2D). Todos los elementos son de igual tamaño, con tres grados de libertad por nudo, dos desplazamientos en el plano y el giro de la sección en dirección perpendicular al plano. El número total de nudos es $m+1$ y, como el nudo de la articulación no puede tener desplazamientos, el número total de variables es $3*(m+1)-2$.

3. ANALISIS

Se simulan 2 segundos del movimiento de la viga flexible sometida al par variable descrito. Las ejecuciones se realizan variando el número de modos dinámicos entre 0 y 4, y el número de elementos viga entre 2^1 y 2^6 . Inicialmente se ajusta el factor de penalización a 10^9 , y se incrementa sólo en el caso de que los resultados obtenidos sean inaceptables. Se considera un paso de tiempo de 1 ms; en el caso de que la simulación falle, el paso de tiempo

se reduce hasta conseguir un buen comportamiento.

Para cada simulación, se recogen los siguientes resultados: a) el tiempo de CPU requerido; b) la variación temporal de la coordenada y del extremos libre de la viga; c) la variación temporal del momento flector en la sección media de la viga. Para tener una solución de referencia con la que evaluar la calidad de la solución obtenida en cada simulación, se resuelve el ejemplo con el módulo no lineal del programa comercial de EF COSMOS/M 2.8, usando una discretización de $2^6=64$ elementos.

Para cada simulación se obtienen dos valores de error: el error en desplazamientos y el error en esfuerzos. En ambos casos, el error se calcula de la misma manera: cada 1 cs se registra la variación temporal de la magnitud correspondiente para la simulación de referencia y para la simulación que va a ser evaluada y se aplica la siguiente expresión:

$$error = \left(\frac{1}{201} \frac{1}{|z|_{\max}} \sum_{i=0}^{200} |z_i - z_i^*| \right) \times 100 \quad (2)$$

siendo 201 el número de valores considerados (pasos cada 1 cs durante 2 s de simulación), z_i representa la correspondiente magnitud (coordenada y del extremo libre de la viga, o momento flector en la sección media de la viga) para la simulación actual, z_i^* es el mismo valor pero de la simulación de referencia, y $|z|_{\max}$ es el máximo valor absoluto de la magnitud durante la simulación. Los resultados de error se expresan en porcentajes.

4. RESULTADOS

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos para todas las simulaciones realizadas, recordando que n es el número de modos dinámicos, m es el número de elementos viga, α es el factor de penalización y Δt es el paso fijo de tiempo seleccionado para la integración numérica. El símbolo “---” significa que la simulación falla para esa combinación de modos dinámicos y tamaño de elemento. La simulación que produce los resultados más precisos se ha marcado en negrita. El tiempo de CPU indicado es el obtenido en las simulaciones realizadas en un Pentium III @ 900 MHz.

Para proporcionar una visualización mejor de los resultados, el tiempo de CPU y los errores obtenidos en todas las simulaciones se representan en la Figura 3. Para las simulaciones que fallan (símbolo “---” en la Tabla 1) se asigna un tiempo de CPU de 100, y unos valores de error de 20 para desplazamientos y 100 para momentos flectores, de forma que los gráficos no se vean distorsionados.

Para cada simulación, ambos errores (en desplazamientos y en esfuerzos) se han reducido a un único número, de acuerdo con la Ecuación (2), en un intento de condensar la información y facilitar la interpretación de los resultados. Para poner de manifiesto la correlación entre los valores de error presentados en la Tabla 1, y las discrepancias reales de las simulaciones con respecto a la referencia, las siguientes gráficas muestra la variación temporal de los desplazamientos y del momento flector para las simulaciones 1, 11, 23 y 30 con respecto a la simulación de referencia (Figuras de la 4 a la 7).

#sim	n	m	α	Δt (s)	Tiemp-CPU(s)	Error en despl. (%)	Error en esf. (%)
1	0	2	10^9	10^{-3}	0.15	8.86	97.68
2		4	10^9	10^{-3}	0.16	9.50	74.59
3		8	10^9	10^{-3}	0.25	11.33	81.23
4		16	10^9	10^{-3}	0.56	11.63	81.93
5		32	10^9	10^{-3}	1.71	11.58	81.50
6		64	10^9	10^{-3}	7.19	11.57	81.35
7	1	2	---	---	---	---	---
8		4	10^9	10^{-3}	0.22	11.17	61.94
9		8	10^9	10^{-3}	0.29	7.48	48.62
10		16	10^9	10^{-3}	0.83	3.63	25.59
11		32	10^9	10^{-3}	2.40	2.10	19.95
12		64	10^9	10^{-3}	8.32	2.24	20.32
13	2	2	---	---	---	---	---
14		4	---	---	---	---	---
15		8	10^9	10^{-3}	0.49	8.10	46.10
16		16	10^9	10^{-3}	1.12	6.41	37.20
17		32	10^9	10^{-3}	2.99	3.68	25.26
18		64	10^9	10^{-3}	11.07	3.58	25.06
19	3	2	---	---	---	---	---
20		4	---	---	---	---	---
21		8	---	---	---	---	---
22		16	10^9	10^{-4}	8.00	4.25	23.40
23		32	10^9	10^{-4}	22.77	8.91	51.43
24		64	10^9	10^{-4}	80.88	6.48	34.72
25	4	2	---	---	---	---	---
26		4	---	---	---	---	---
27		8	---	---	---	---	---
28		16	10^{10}	10^{-4}	9.22	7.44	35.86
29		32	10^9	10^{-4}	25.56	3.09	20.23
30		64	10^9	10^{-4}	93.68	5.22	28.76

Tabla 1. Tiempo de CPU y errores de todas la simulaciones ejecutadas.

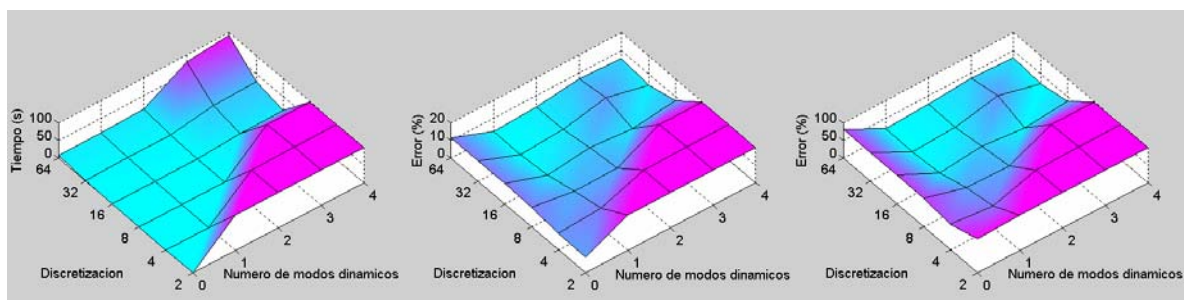


Figura 3. Resultados: a) Tiempo de CPU; b) Error en desplazamientos; c) Error en esfuerzos.

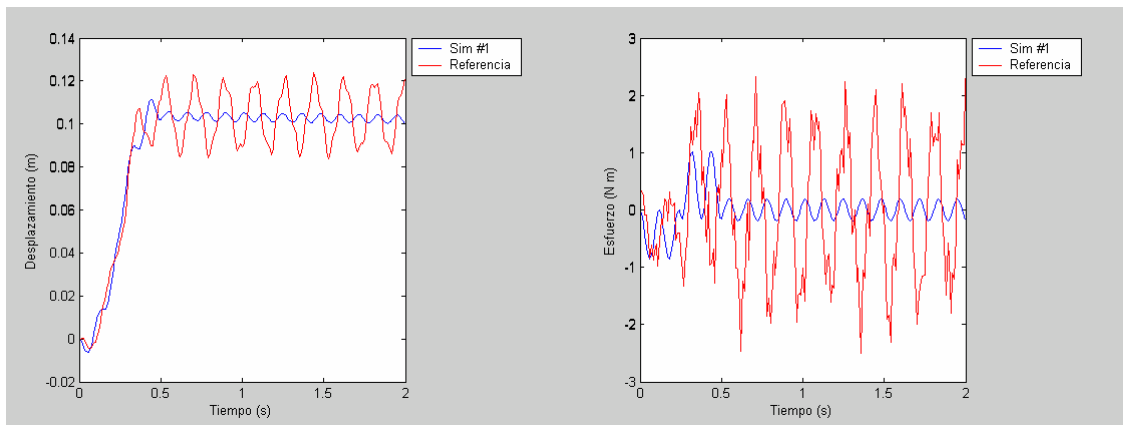


Figura 4. Errores en la simul. #1 ($n=0, m=2$): a) Desplazamientos (8.86%); b) Esfuerzos (97.68%).

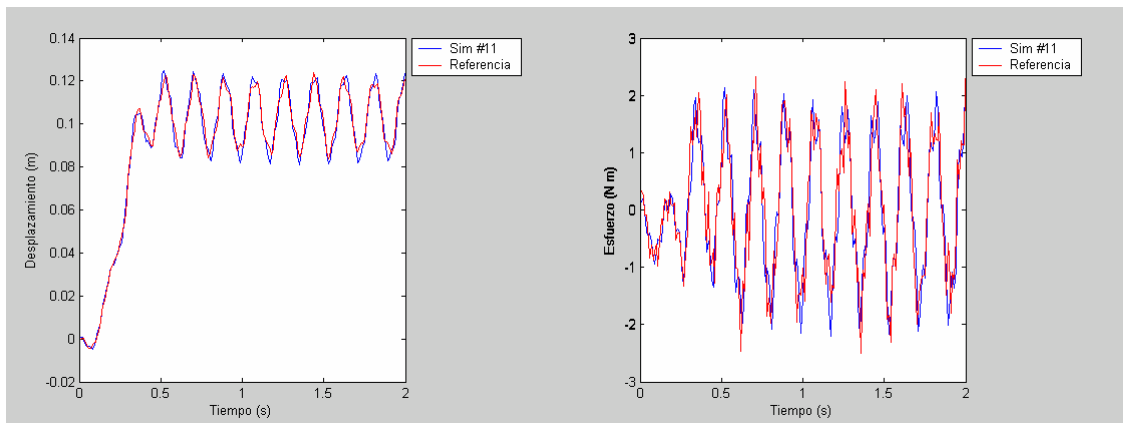


Figura 5. Errores en la simul. #11 ($n=1, m=32$): a) Desplazamientos (2.10%); b) Esfuerzos (19.95%).

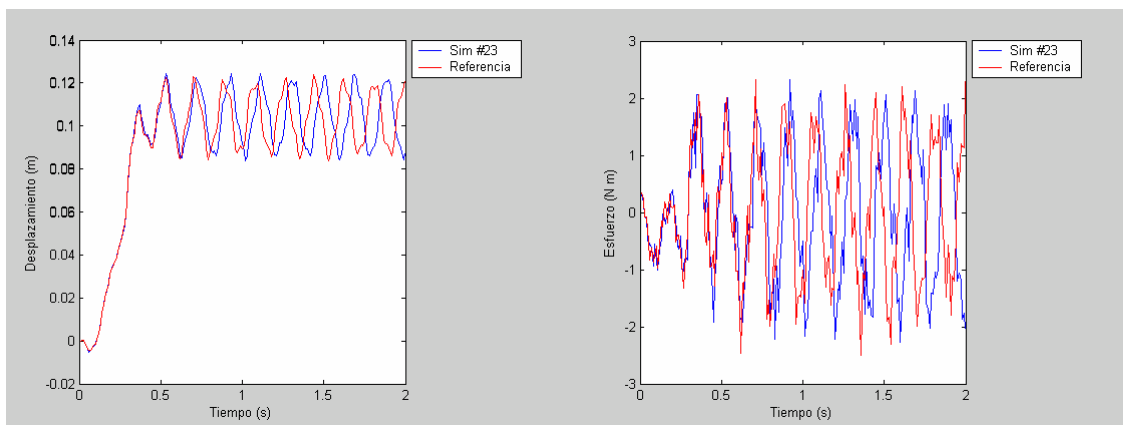


Figura 6. Errores en la simul. #23 ($n=3, m=32$): a) Desplazamientos (8.91%); b) Esfuerzos (51.43%).

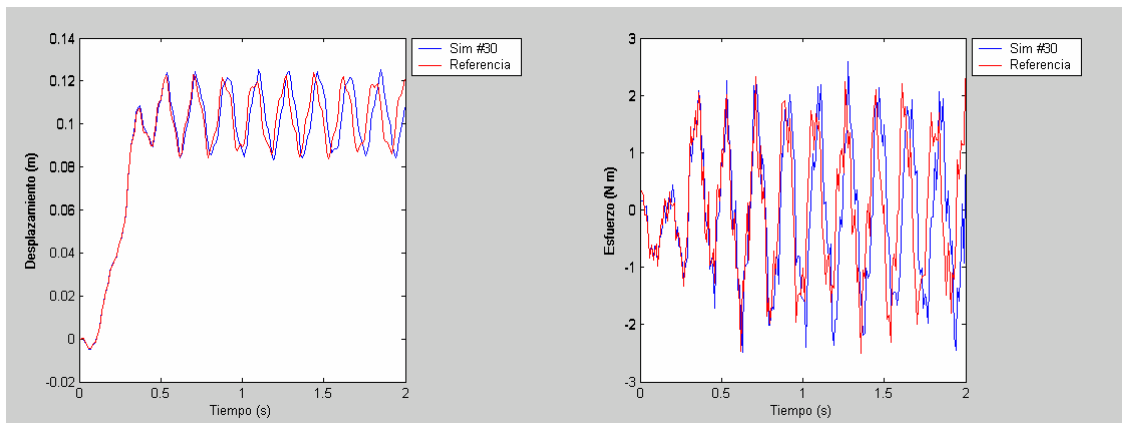


Figura 7. Errores en la simul. #30 ($n=4$, $m=64$): a) Desplazamientos (5.22%); b) Esfuerzos (28.76%).

En las gráficas representadas, se puede ver que, si el error se determina de acuerdo con la Ecuación (2), un error de un 8% en desplazamientos es grande, mientras que un valor de un 2% significa muy buena precisión. Por otro lado, un error en esfuerzos del 100% representa un gran error, mientras que un 20% indica un excelente acuerdo con la simulación de referencia. Aunque las escalas de ambos errores son diferentes, así como los valores medios de cada tipo de resultados, su tendencia es, en general, la misma.

5. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

A la vista de los resultados presentados en las secciones previas, resulta evidente que la inclusión de un número mayor de modos dinámicos de deformación no conduce necesariamente a resultados más precisos, aunque siempre conduce a simulaciones menos eficientes. En el ejemplo, los resultados más precisos se obtienen con sólo un modo dinámico, y la eficiencia correspondiente es alta en el marco de todas las simulaciones ejecutadas. Esto significa que existe un número óptimo de modos dinámicos para un cierto análisis.

A la vista de la discretización, se puede afirmar que hay un tamaño de elemento máximo que no debe sobrepasarse en función del modo más alto considerado en la simulación. Una vez situados por debajo de este máximo, se obtienen resultados más precisos para un refinamiento de malla creciente, hasta un determinado valor; más allá, un mayor número de EF no conduce a mejoras significativas. Por ello, se puede decir que la discretización requerida depende del número de modos dinámicos incluidos y que, al igual que el número de modos dinámicos, también existe un tamaño óptimo de elemento de la malla de EF.

Se puede mencionar que el incremento exponencial que se aprecia en el tiempo de CPU registrado en la Tabla 1 a medida que el número de EF aumenta, es debido a los productos de las matrices cuyo tamaño depende del tamaño de malla, y que se hacen necesarios para montar los términos inerciales asociados a los componentes flexibles. Tales productos pueden ser realizados de forma más eficiente si se emplean técnicas de matrices dispersas y, así, atenuar apreciablemente el notable crecimiento del tiempo de CPU con respecto al tamaño de la discretización.

Analizando ahora los parámetros numéricos del método empleado, parece que se requiere incrementar el valor del factor de penalización sólo en los casos en los que la discretización de EF resulta insuficiente. Por otro lado, el tamaño de paso necesario para llevar a cabo la integración numérica está relacionado con los modos dinámicos más altos incluidos en el modelo: un número de modos mayor implica menores tamaños de paso y, consecuentemente, menor eficiencia.

De todo lo que se ha comentado, se concluye que sólo uno de los cuatro parámetros estudiados es independiente: el número de modos dinámicos. Los otros tres –tamaño de la discretización, factor de penalización y tamaño del paso de tiempo– pueden ser establecidos en función del número de modos dinámicos. Así, existe un valor óptimo del número de modos dinámicos para un cierto problema, que captura correctamente el movimiento del elemento; la inclusión de modos adicionales sólo conduce a la introducción de frecuencias mayores en la solución que, a su vez, dificultan el proceso de integración numérica, produciendo errores más altos. Por ello, para desarrollar modelos que puedan alcanzar el tiempo real con la formulación propuesta, resulta muy importante disponer de un método que determine cuáles y cuántos modos dinámicos deben ser considerados en un cierto análisis. Por supuesto, siempre se puede utilizar el proceso iterativo, que puede ser una opción en determinadas aplicaciones.

En el campo de la dinámica estructural, el número óptimo de modos dinámicos depende de las propiedades físicas del sistema y del contenido en frecuencia de las fuerzas aplicadas; ambos pueden ser calculados antes de lanzar la simulación. Sin embargo, en dinámica de sistemas multicuerpo flexibles influyen decisivamente las fuerzas de enlace y de inercia, y éstas no pueden ser obtenidas a priori, ya que dependen del movimiento del cuerpo y éste es desconocido hasta que se lleva a cabo la simulación. Así, parece que el hacer una estimación inicial del número óptimo de modos dinámicos en el contexto de dinámica de sistemas multicuerpo flexibles no es una tarea fácil, y que sería necesaria al menos una simulación previa considerando todos los componentes rígidos, para conseguir más información acerca de la forma que adoptan estas fuerzas de enlace y de inercia.

Esto es exactamente lo que propone el método de los factores de participación modal (FPM), que ha sido empleado con éxito recientemente [11, 12] para estimar los modos dinámicos que deben incluirse en el modelo de un sistema dinámico multicuerpo.

Este método se aplica en el ejemplo estudiado, para ver si se obtienen resultados coherentes. Así, se lleva a cabo una simulación del sistema, considerado como un sólido rígido, para identificar la posición más crítica. De esta simulación se extraen las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en tal posición, y se realiza un análisis estático del sólido, ahora considerado como una estructura. Para este propósito se emplea la malla de EF de 64 elementos, utilizada para la solución de referencia, y se obtienen los 16 primeros modos dinámicos. La matriz de rigidez del sistema y las fuerzas aplicadas en el instante crítico se proyectan en el espacio modal, y se obtienen las correspondientes amplitudes modales de las ecuaciones estáticas de equilibrio.

La Tabla 2 muestra los factores de participación modal obtenidos para los primeros 7 modos dinámicos. Los restantes factores son menores.

# modo din.	FPM (%)
1	100
2	3.46
3	0.77
4	0.17
5	0.06
6	0.02
7	0.01

Tabla 2. Factores de participación modal del ejemplo propuesto.

A la vista de los resultados presentados en la Tabla 2, resulta clara la importancia del primer modo dinámico de deformación frente al resto, y se observa que sólo el segundo modo queda por encima del límite del 1%, comúnmente usado para la inclusión o no de un modo dinámico en un modelo. Así, el método de los factores de participación modal indica que la selección óptima consiste en emplear el primer modo dinámico de deformación, o quizás, el primero y el segundo, lo que concuerda con los resultados expuestos en este artículo. Así, se considera que el método de los factores de participación modal es un buen candidato para la estimación inicial del número óptimo de modos dinámicos a considerar para cada sólido flexible. Una vez que esta decisión se ha tomado, el ajuste de los otros parámetros a su valor óptimo (tamaño de la discretización empleada para cada sólido flexible, el factor de penalización y el tamaño del paso de tiempo), parece ser relativamente fácil; el desarrollo de algún método para este propósito será abordado en el futuro.

6. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados expuestos y la discusión de los mismos, se pueden exponer las siguientes conclusiones:

- a) Recientemente, los autores han propuesto un método preciso, robusto, eficiente, y de fácil de implementación para el análisis en tiempo real de sistemas multicuerpo con componentes flexibles, basado en la aproximación de sistema de referencia móvil, y que incluye modos estáticos y dinámicos de deformación.
- b) En la aplicación del mencionado método, el analista debe decidir el valor de cuatro parámetros, dos de modelización –número de modos dinámicos y tamaño de la discretización de EF de cada componente flexible–, y dos numéricos –factor de penalización y tamaño del paso de tiempo de integración–.
- c) Estos cuatro parámetros no son independientes: un cierto valor del número de modos dinámicos condiciona los correspondientes valores óptimos de los otros tres.
- d) Para un problema concreto, existe un número óptimo de modos dinámicos que conduce a los mejores resultados en términos de precisión.
- e) Se puede emplear el método de los factores de participación modal para disponer de una estimación inicial de este número óptimo de modos dinámicos.
- f) El desarrollo de un método que, en función del número de modos dinámicos de deformación, obtenga automáticamente los valores óptimos de los tres parámetros

restantes, se deja para una próxima investigación.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por la CICYT del MCYT de España (Proyecto No. DPI2000-0379) y por la SGID de Galicia (Proyecto No. PGIDT01PXI16601PN).

REFERENCIAS

- [1] J. Cuadrado, R. Gutierrez, M.A. Naya and P. Morer, A Comparison in Terms of Accuracy and Efficiency between a MBS Dynamic Formulation with Stress Analysis and a Non-linear FEA Code, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **51**(9), 1033-1052 (2001).
- [2] J. Cuadrado, R. Gutierrez, M.A. Naya and M. Gonzalez, Experimental Validation of a Flexible MBS Dynamic Formulation through Comparison between Measured and Calculated Stresses on a Prototype Car, *Multibody System Dynamics*, aceptado.
- [3] J. Garcia de Jalon e E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems – The Real-Time Challenge–*, Springer-Verlag (1994).
- [4] M. Geradin and A. Cardona, *Flexible Multibody Dynamics –A Finite Element Approach*, John Wiley and Sons (2001).
- [5] E. Bayo and R. Ledesma, Augmented Lagrangian and Mass-Orthogonal Projection Methods for Constrained Multibody Dynamics, *Nonlinear Dynamics*, **9**, 113-130 (1996).
- [6] L.F. Shampine, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall (1994).
- [7] A.A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*, 2nd edition, Cambridge University Press (1998).
- [8] L. Meirovitch and M.K. Kwak, Convergence of the Classical Rayleigh-Ritz Method and the Finite Element Method, *AIAA Journal*, **28** (8), 1509-1516 (1990).
- [9] R. Schwertassek, O. Wallrapp and A.A. Shabana, Flexible Multibody Simulation and Choice of Shape Functions, *Nonlinear Dynamics*, **20**, 361-380 (1999).
- [10] R. Schwertassek, S.V. Dombrowsky and O. Wallrapp, Modal Representation of Stress in Flexible Multibody Simulation, *Nonlinear Dynamics*, **20**, 381-399 (1999).
- [11] O. Wallrapp and S. Wiedemann, Simulation of Deployment of a Flexible Solar Array, *Multibody System Dynamics*, **7**, 101-125 (2002).
- [12] O. Wallrapp and S. Wiedemann, Flexible Multibody System Applications using Nodal and Modal Coordinates, *Proceedings of ASME 2003 DETC*, Paper VIB-48305, Chicago, Illinois, USA, September 2-6 (2003).