

## Dinámica directa de la marcha humana mediante métodos de control

J. Cuadrado Aranda<sup>1</sup>, R. Pàmies-Vilà<sup>2</sup>, U. Lugrís Armesto<sup>3</sup>, J.M. Font-Llagunes<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Ingeniería Industrial II. Universidad de La Coruña. javicuaad@cdf.udc.es

<sup>2</sup>Dpto. Ingeniería Mecánica. Universitat Politècnica de Catalunya. rosa.pamies@upc.edu

<sup>3</sup>Dpto. de Ingeniería Industrial II. Universidad de La Coruña. ulugris@udc.es

<sup>4</sup>Dpto. Ingeniería Mecánica. Universitat Politècnica de Catalunya. josep.m.font@upc.edu

*En este artículo se aborda el análisis de un movimiento de marcha conocido mediante dinámica directa, método que presenta ventajas, respecto al tradicionalmente utilizado de dinámica inversa, tales como una mayor consistencia dinámica, posibilidad de introducir la dinámica muscular de activación y contracción, y capacidad de proporcionar los esfuerzos de contacto entre el sujeto y dispositivos de ayuda a la marcha tales como ortesis o muletas. El problema se puede afrontar mediante métodos de optimización o de control, habiéndose elegido estos últimos por su mayor eficiencia y robustez, y por su menor complejidad. Se considera aquí la marcha de un sujeto sano, cuyo movimiento y esfuerzos de contacto con el suelo han sido medidos experimentalmente, asumiendo en primer lugar que todos sus grados de libertad se pueden actuar y, a continuación, que sólo se pueden actuar los grados de libertad correspondientes a las articulaciones del sujeto, que es lo que ocurre en la realidad, pues se trata de un sistema infra-actuado.*

### 1. Introducción

La predicción del movimiento humano mediante simulación por computador es una herramienta que puede servir para anticipar el resultado de una operación quirúrgica o como ayuda en el diseño de dispositivos protésicos y ortésicos. Esta última es la motivación en un proyecto que están llevando a cabo los autores, cuyo objetivo es el diseño de una ortesis rodilla-tobillo-pie activa como dispositivo de ayuda a la marcha de personas con lesión medular [1], según se ilustra en la figura 1.



**Figura 1:** Ortesis pasivas (izquierda) y activas (derecha).

En general, el problema de predicción de la marcha se aborda mediante métodos de optimización, habiéndose propuesto varios enfoques en la literatura [2] (movimiento como variable de diseño, actuación como variable de diseño, híbrido). Sin embargo, independientemente del enfoque, la implementación de dichos métodos plantea grandes dificultades, tanto desde el punto de vista de la convergencia como del de la eficiencia, además por supuesto de la incertidumbre a la hora de proponer la función de coste más adecuada en cada caso.

Es por ello que los autores han decidido abordar primero el análisis de un movimiento de marcha conocido mediante dinámica directa, ya que se trata de un problema de menor dificultad que puede servir sin embargo como paso intermedio hacia la predicción de movimiento, pues también exige consistencia dinámica (superior a la exigida por el análisis mediante dinámica inversa), pero carece de incertidumbre en el resultado. Además, el uso de dinámica directa posee ventajas frente al de dinámica inversa. Así, cuando se desea descender a nivel muscular, el enfoque de dinámica directa permite incluir la dinámica de activación y contracción muscular y, cuando se analiza la marcha de una persona discapacitada que precisa de dispositivos de asistencia para caminar (ortesis, muletas, etc.), dicho enfoque proporciona los esfuerzos de contacto entre el cuerpo y estos dispositivos.

Se han estudiado por tanto las diferentes alternativas existentes para obtener, mediante dinámica directa, los esfuerzos articulares que originan un cierto movimiento de marcha. El problema se puede abordar mediante métodos de optimización o mediante métodos de control, habiendo optado los autores por éstos últimos debido a su mayor eficiencia y robustez, y a su menor complejidad.

En este trabajo se considera la marcha de un sujeto sano, cuyo movimiento y esfuerzos de contacto con el suelo han sido medidos experimentalmente, y el objetivo es determinar los pares articulares que producen dicho movimiento mediante dinámica directa.

Inicialmente, se ha asumido que todos los grados de libertad del modelo computacional del sujeto pueden ser actuados. Con esta hipótesis, se han probado las siguientes opciones para el análisis dinámico directo [3]: a) utilizar como actuaciones los esfuerzos calculados previamente mediante dinámica inversa; b) añadir a lo anterior un control PD (PD control with computed feedforward); c) utilizar como actuaciones las calculadas mediante el método de los pares computados (computed torque control, CTC).

A continuación, se ha considerado que sólo se pueden actuar los grados de libertad correspondientes a las articulaciones del sujeto, pero no los seis grados de libertad del sólido base (pelvis, pie en contacto con el suelo), que es lo que ocurre en la realidad, pues se trata de un sistema infra-actuado [4]. En este caso, las reacciones exteriores deberían proceder de un modelo de contacto pie-suelo. Sin embargo, como paso previo, de menor dificultad, a la introducción de dicho modelo de contacto, se ha optado por introducir sobre el sólido base las reacciones calculadas por dinámica inversa y, sobre ellas, una perturbación que represente el desajuste que va a producir el modelo de contacto pie-suelo.

El resto del artículo se organiza como sigue. El segundo apartado describe el experimento realizado, el modelo multicuerpo de sujeto sano utilizado, y la técnica de procesamiento de señal aplicada a los datos medidos durante la marcha. El tercer apartado muestra la formulación de las ecuaciones del movimiento empleada, y la forma en que se realiza el análisis dinámico inverso del movimiento medido para obtener los pares articulares. El cuarto apartado se dedica al cálculo de los pares articulares mediante dinámica directa cuando se permite que haya actuación en todos los grados de libertad del modelo, mientras que el quinto apartado aborda el mismo problema cuando se permite actuación sólo en las articulaciones. Por último, el sexto apartado recoge las conclusiones y el trabajo a realizar en el futuro.

## 2. Experimento y modelo

El sujeto seleccionado es un varón de 34 años, 1.82 m de estatura y 85 kg de peso. Camina por un pasillo de marcha en el que se encuentran integradas dos placas de fuerza AccuGait de AMTI, que miden los esfuerzos de contacto pie-suelo a una frecuencia de 100 Hz. El movimiento de 37 marcadores reflectantes situados sobre el sujeto es capturado por 12 cámaras de infrarrojos OptiTrack FLEX:V100, de Natural Point, que graban también a una frecuencia de 100 Hz.

El cuerpo del sujeto se modela como un sistema multicuerpo (mostrado en la figura 2) formado por 18 sólidos rígidos: pies (cada pie se divide en dos sólidos conectados por el metatarso), piernas, muslos, pelvis, torso, cuello, cabeza, brazos, antebrazos y manos. Los sólidos están unidos por rótulas esféricas, dando lugar a un modelo con 57 grados de libertad. Para su definición se emplean 228 coordenadas, 174 de las cuales son coordenadas naturales (22 puntos y 36 vectores unitarios), mientras que las 54 restantes son los 18 conjuntos de 3 ángulos que definen la orientación de cada sólido. En la figura 2, los puntos rojos son los marcadores reflectantes.

Los parámetros geométricos e inerciales del modelo se obtienen, para las extremidades inferiores, mediante ecuaciones de correlación a partir de unas medidas tomadas sobre el sujeto, de acuerdo con el procedimiento descrito en [5]. Y, para la parte superior del cuerpo, mediante tablas [6], con escalados en función de la estatura y el peso del sujeto.

Las historias de posición de los 37 marcadores se filtran mediante un algoritmo basado en la técnica denominada Singular Spectrum Analysis (SSA), y las coordenadas naturales del modelo se calculan a partir de ellas mediante

relaciones algebraicas. Posteriormente, se asegura la consistencia cinemática mediante un procedimiento de minimización, y se calculan las historias de 57 coordenadas independientes (tantas como grados de libertad del modelo) formadas por las 3 coordenadas cartesianas de la articulación lumbar ( $J_1$  en la figura 2), y los 18 conjuntos de 3 ángulos que definen la orientación de cada sólido. Estas historias se aproximan por splines cúbicas, que se derivan analíticamente para obtener las historias de velocidades y aceleraciones. En [7] puede obtenerse más detalle sobre esta técnica de procesamiento de señal.

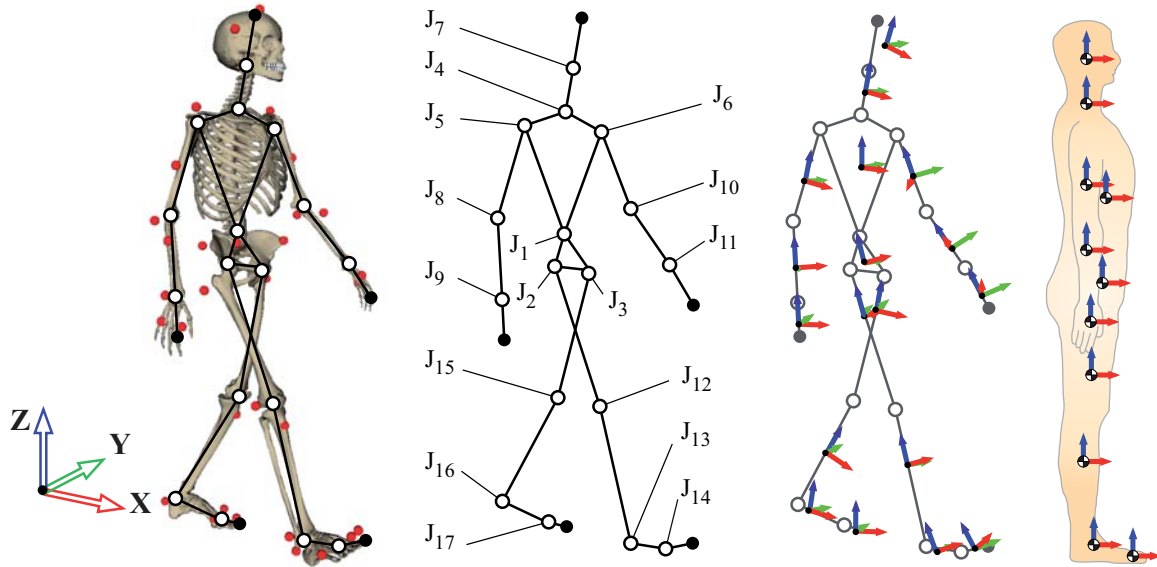


Figura 2: Modelo multicuerpo del cuerpo humano.

### 3. Formulación de la dinámica multicuerpo y análisis dinámico inverso

Las ecuaciones del movimiento se plantean en número mínimo mediante el método de transformación de velocidades denominado método de matriz  $R$  en [8]. Se parte de dos conjuntos de variables, el de coordenadas dependientes,  $\mathbf{q}$ , formado en este caso por las 228 coordenadas del modelo, y el de coordenadas independientes,  $\mathbf{z}$ , formado por la 57 coordenadas ya indicadas en el apartado anterior (las 3 coordenadas cartesianas de la articulación lumbar y los 18 conjuntos de 3 ángulos que definen la orientación de cada sólido). Entonces, las ecuaciones del movimiento son:

$$\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}}) \quad (1)$$

donde  $\bar{\mathbf{M}}$  es la matriz de masas referida a  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{R}$  es la matriz que permite obtener las velocidades dependientes en función de las independientes,  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}}$ , y  $\bar{\mathbf{Q}}$  es el vector de fuerzas generalizadas aplicadas referido a  $\mathbf{q}$ . Por tanto, las ecuaciones del movimiento (1) pueden escribirse de forma compacta como

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q} \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{M} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R}$  y  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T (\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}})$ . El número de ecuaciones (2) será, en este caso, de 57, tantas como grados de libertad del modelo.

Con estas ecuaciones se realiza un análisis dinámico inverso del movimiento medido experimentalmente. Según se ha explicado en el apartado anterior, se dispone de las historias de posición, velocidad y aceleración de las coordenadas independientes,  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$ ,  $\ddot{\mathbf{z}}$ , y de las coordenadas dependientes,  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Por lo tanto, si se escriben las ecuaciones del movimiento (2) como

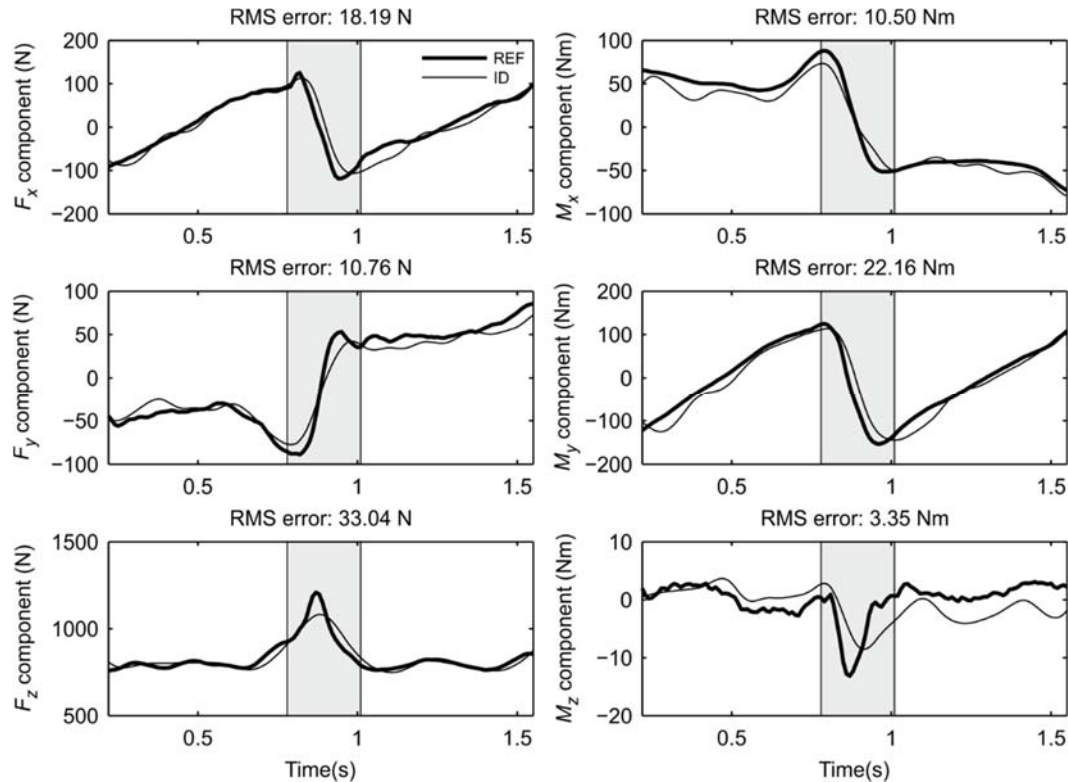
$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_m \quad (3)$$

donde  $\mathbf{Q}_m$  es el vector de fuerzas generalizadas motoras, se puede despejar dicho vector en cada instante medido (medidas a 100 Hz, luego paso de tiempo de 10 ms),

$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{Q} \quad (4)$$

obteniéndose así los pares motores en las articulaciones que han dado lugar a ese movimiento, y las reacciones de contacto pie-suelo (tres componentes de la fuerza y tres componentes del momento) que se han producido.

Este procedimiento es válido durante el tiempo de la marcha en que sólo hay un pie en contacto con el suelo. Sin embargo, durante la fase de doble apoyo las reacciones exteriores son redundantes, pues hay una fuerza y un momento en cada pie, lo que supone un total de doce reacciones, frente a las seis que pueden determinarse de las ecuaciones del movimiento (4). Para superar esta indeterminación, se utilizan las medidas de fuerza y momento de reacción obtenidas experimentalmente con las placas (nótese que dichas medidas no se emplean para la fase de simple apoyo). Lo que se hace entonces es corregir las fuerzas y momentos medidos por las placas para que den la misma fuerza y momento totales obtenidos de (4), repartiendo la diferencia entre ambos pies de manera proporcional al valor absoluto de cada componente.



**Figura 3:** Discrepancia entre reacciones exteriores calculadas por dinámica inversa y medidas con placas.

La discrepancia entre las reacciones exteriores calculadas por dinámica inversa según se ha explicado y medidas experimentalmente con las placas, sirve para valorar la calidad de todo el proceso, y se muestra en la figura 3.

## 4. Dinámica directa: sistema totalmente actuado

En el apartado anterior se han obtenido, mediante dinámica inversa, los pares articulares que han dado lugar al movimiento medido, y las reacciones exteriores (de contacto pie-suelo) que se han producido. Ahora, el objetivo es obtener esas magnitudes mediante dinámica directa, asumiendo que se puede realizar actuación en todos los grados de libertad del modelo. Hay que indicar que la dinámica directa se resuelve, en todos los casos, no mediante la integración temporal de las ecuaciones del movimiento (1), sino mediante un método de Lagrange aumentado de índice 3 con proyecciones de velocidad y aceleración, combinado con la regla trapezoidal como integrador [9]. Entonces, se sitúan actuadores en los 57 grados de libertad del modelo (51 grados de libertad de las articulaciones y 6 grados de libertad del sólido base), y se prueban los siguientes tres métodos para proporcionar las entradas a dichos actuadores.

### 4.1. Computed feedforward

El primer método consiste en utilizar como entradas de los actuadores los resultados de pares articulares y reacciones exteriores obtenidos en el análisis dinámico inverso descrito en el apartado anterior. Idealmente, el movimiento obtenido debería coincidir con el procesado tras la captura, pero esto no ocurre debido al carácter inestable de la marcha y a los errores en la integración numérica de las ecuaciones del movimiento.

Utilizando en la integración el paso de tiempo de la captura, es decir, 10 ms, la simulación es completamente inestable. Sin embargo, si se reduce el paso de tiempo a 1 ms, se consigue realizar el 90% del ejercicio, aunque a partir de ese momento, la simulación también se hace inestable.

#### 4.2. PD control with computed feedforward

El segundo método consiste en utilizar como entradas las empleadas en el sub-apartado anterior, pero añadiendo un control proporcional-derivativo (PD) que trata de seguir el movimiento original para evitar la inestabilidad. Entonces, la fuerza generalizada de cada actuador tiene la forma,

$$u_i = Q_{mi}^{DI} + k_{pi}(z_i^* - z_i) + k_{Di}(\dot{z}_i^* - \dot{z}_i) \quad , \quad i=1,\dots,57 \quad (5)$$

donde  $Q_{mi}^{DI}$  es la correspondiente fuerza generalizada motora obtenida del análisis dinámico inverso en (4),  $k_{pi}$  y  $k_{Di}$  son las ganancias de los controladores, que se ajustan por prueba y error,  $z_i^*$  es el valor medido (y procesado) de la coordenada independiente  $i$ , y  $z_i$  es el valor actual de dicha coordenada.

La tabla 1 muestra los valores asignados a las ganancias de los controladores, que se expresan en función de dos parámetros,  $K_P$  y  $K_D$ , y de la masa de cada segmento corporal,  $m_j$ .

**Tabla 1:** Ganancias de los controladores PD.

$K_P = 350, K_D = 1$	$k_{pi}/m_j$	$k_{Di}/m_j$	
Junta lumbar	x	$K_P$	$K_D$
	y	$6K_P$	$K_D$
	z	$8K_P$	$8K_D$
Articulaciones	$0.009K_P$	$0.003K_D$	

Como ocurría con el primer método, si el paso de tiempo de integración se toma 10 ms la simulación es completamente inestable. Sin embargo, con un paso de 1 ms se consigue simular todo el ejercicio, si bien los resultados son muy sensibles a los valores elegidos para las ganancias de los controladores. Las discrepancias entre los valores medidos y los calculados por este método se encuentran en el orden de  $10^{-7}$  m para las coordenadas de posición (x, y, z, de la junta lumbar),  $10^{-5}$  rad para las coordenadas angulares,  $10^{-2}$  N para las tres componentes de la fuerza de reacción exterior, y  $10^{-4}$  Nm para las componentes del momento de reacción exterior y para los pares articulares.

#### 4.3. Computed torque control

El tercer método consiste en utilizar como entradas las proporcionadas por el control de los pares computados (computed torque control en inglés, CTC) [3]. El vector de fuerzas generalizadas de los actuadores es en este caso,

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{z}}^* + \mathbf{C}_D(\dot{\mathbf{z}}^* - \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{C}_P(\mathbf{z}^* - \mathbf{z})) - \mathbf{Q} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{C}_P$  y  $\mathbf{C}_D$  son matrices diagonales que contienen las ganancias asociadas a cada coordenada independiente. Como se explica en [3], la dinámica del error viene representada, en este método de control, por un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, siendo  $\mathbf{C}_P$  y  $\mathbf{C}_D$  los coeficientes de los términos proporcional y derivada primera, respectivamente. Entonces, imponiendo la relación  $c_{Di} = 2\sqrt{c_{Pi}}$  entre los términos de las ganancias asociadas a una coordenada determinada, se consigue amortiguamiento crítico, de manera que sólo es preciso ajustar un conjunto de coeficientes. En este caso, se ha ajustado el conjunto dado por  $\mathbf{C}_P$ .

A diferencia del método anterior, este método se muestra muy robusto frente a la elección de las ganancias de los controladores, de forma que se puede dar el mismo valor a todos los elementos de  $\mathbf{C}_P$ , ya que cada controlador va afectado por la masa correspondiente, como se puede ver en (6). Se han probado valores de los elementos de  $\mathbf{C}_P$  comprendidos entre  $10^{-1}$  y  $10^5$ , y se han obtenido resultados satisfactorios con todos ellos.

Esta vez, el método es capaz de realizar la simulación incluso con el paso de tiempo de integración de 10 ms, lo que supone una confirmación adicional de la robustez del mismo. Aunque con este paso de tiempo los errores en posición son pequeños, los errores a nivel de fuerza/momento son considerables. Sin embargo, con un paso de tiempo de 1 ms los resultados son excelentes. Por ejemplo, con un valor de los elementos de  $\mathbf{C}_P$  de  $10^3$ , los errores son del orden de  $10^{-6}$  m para las coordenadas de posición,  $10^{-4}$  rad para las coordenadas angulares, 1 N para las componentes de la fuerza de reacción exterior, y  $10^{-1}$  Nm para las componentes del momento de reacción exterior y para los pares articulares. Aunque estos errores son superiores a los conseguidos por el método anterior, pueden reducirse si se aumenta el valor de las ganancias, si bien comienza a aparecer algo de ruido.

### 5. Dinámica directa: sistema infra-actuado

En el apartado anterior se han obtenido, mediante dinámica directa, los pares articulares que han dado lugar al movimiento medido, y las reacciones exteriores que se han producido, asumiendo que se puede realizar actuación en todos los grados de libertad del modelo. Ahora se avanza un paso más hacia la realidad, y se asume que sólo

puede haber actuación en las articulaciones, pero no en el sólido base. Entonces, se sitúan actuadores en los 51 grados de libertad de las articulaciones del modelo.

A continuación, se explica cómo calcular las actuaciones en sistemas infra-actuados para obtener un cierto número de salidas especificadas, siguiendo un procedimiento análogo al método CTC utilizado en el apartado anterior para sistemas totalmente actuados [4,10,11]. Las salidas pueden ser tanto coordenadas del modelo como reacciones exteriores. Para empezar, se van a escribir las ecuaciones del movimiento (2) de manera más desarrollada.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Tr} + \mathbf{Bu} \quad (7)$$

donde ahora  $\mathbf{Q}$  contiene las fuerzas generalizadas dependientes de la velocidad y gravitatorias (y otras fuerzas aplicadas que pudiera haber, distintas de las que vienen a continuación), el producto  $\mathbf{Tr}$  contiene la contribución de las reacciones pie-suelo ( $\mathbf{r}$  son las reacciones y  $\mathbf{T}$  la matriz que las proyecta sobre las coordenadas independientes), y el producto  $\mathbf{Bu}$  representa las actuaciones sobre el sistema ( $\mathbf{u}$  son las propias actuaciones y  $\mathbf{B}$  es la matriz que las proyecta sobre las coordenadas independientes). Despejando las aceleraciones,

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr} + \mathbf{Bu}) \quad (8)$$

Si las salidas de movimiento  $\mathbf{y}$  que se quieren imponer al sistema son parte de las coordenadas  $\mathbf{z}$ , se podrá escribir,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Hz} \quad (9)$$

siendo  $\mathbf{H}$  una matriz booleana, que permite elegir aquellas coordenadas  $z_i$  que se toman como salida. Si las salidas de fuerza  $\mathbf{r}$  son reacciones exteriores y se ha incluido un modelo de contacto pie-suelo, se cumplirá,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \quad (10)$$

Derivando dos veces respecto al tiempo la ecuación (9) y sustituyendo (8),

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{HM}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr} + \mathbf{Bu}) \quad (11)$$

Derivando una vez respecto al tiempo la ecuación (10) y sustituyendo (8),

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \ddot{\mathbf{z}} = -\mathbf{K}\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{CM}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr} + \mathbf{Bu}) \quad (12)$$

Escribiendo conjuntamente las ecuaciones (11) y (12) resulta,

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}\dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr}) + \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bu} \quad (13)$$

Y, llamando  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}\dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr}) + \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Bu} \quad (14)$$

De manera que ya se puede despejar el vector de actuaciones como,

$$\mathbf{u} = (\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \left[ \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} - \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr}) \right] \quad (15)$$

Si además se quiere introducir feedback,

$$\mathbf{u} = (\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \left[ \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}^* + \mathbf{C}_1(\dot{\mathbf{y}}^* - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{y}^* - \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{r}}^* + \mathbf{C}_3(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} - \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr}) \right] \quad (16)$$

donde  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  y  $\mathbf{C}_3$  son matrices diagonales que contienen las ganancias asociadas a cada salida.

Entonces, si el número de salidas es igual al de actuadores (en el caso a estudio, 51), la matriz  $\mathbf{P} = \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$  es cuadrada y, supuesto la elección de las salidas haya sido tal que dicha matriz esté bien condicionada, se podrá invertir, obteniéndose de la ecuación (16) las entradas que han de ser introducidas en los actuadores para lograr las salidas deseadas. El análisis de los pivots de esta matriz indica cuáles son las variables más adecuadas para ser seleccionadas como salidas, y cuáles las que conviene dejar libres porque su modificación ofrece un gran potencial para controlar el sistema.

Si el número de salidas es mayor que el de actuadores, las salidas deseadas sólo se podrán imponer en el sentido de mínimos cuadrados, es decir, se tratará de minimizar el error con que se imponen las salidas. El sistema de ecuaciones a resolver será entonces,

$$\mathbf{u} = (\mathbf{P}^T\mathbf{W}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{W} \left[ \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}^* + \mathbf{C}_1(\dot{\mathbf{y}}^* - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{y}^* - \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{r}}^* + \mathbf{C}_3(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} - \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q} + \mathbf{Tr}) \right] \quad (17)$$

donde  $\mathbf{W}$  es la matriz diagonal de pesos que se pueden asignar a las distintas salidas, dando un peso grande a aquellas salidas que se desea se cumplan con gran precisión, y un peso pequeño a aquellas menos relevantes.

Como en este caso solamente hay actuación en los 51 grados de libertad de las articulaciones, pero no en los 6 grados de libertad del sólido base, las reacciones exteriores deberían proceder de un modelo de contacto pie-suelo, que evaluara las mismas durante la simulación en función de la posición y velocidad de cada pie respecto al suelo. Sin embargo, este procedimiento presenta una dificultad notable, ya que las discrepancias entre las reacciones introducidas por el modelo de contacto y las verdaderas reacciones pueden ser considerables, comprometiendo con ello la estabilidad del control.

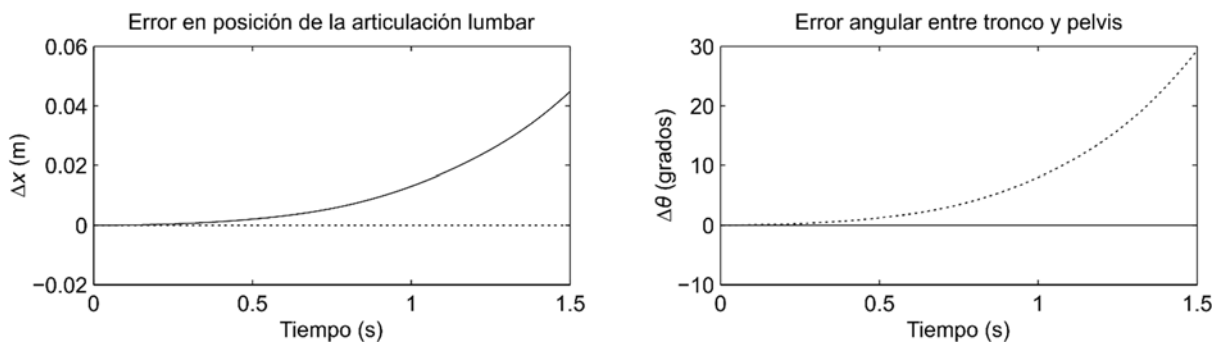
Entonces, para abordar el problema de forma más asequible, se han introducido sobre el sólido base las reacciones calculadas por dinámica inversa. Y, además, para tener en cuenta las discrepancias que va a introducir el modelo de contacto pie-suelo, se ha añadido una perturbación a las reacciones mencionadas, para ver cómo responden a la misma los controladores de los actuadores. La perturbación consiste en una fuerza constante de valor 1 N aplicada en dirección longitudinal ( $x$ ) sobre la articulación lumbar del modelo. El valor dado a los elementos de la ganancia  $\mathbf{C}_2$  de la ecuación (16) es de  $10^2$ , obteniéndose los de  $\mathbf{C}_1$  con la condición de amortiguamiento crítico para la dinámica del error.

### 5.1. Salidas coincidentes con coordenadas actuadas

En primer lugar, se consideran como salidas las coordenadas angulares de todas las articulaciones, esto es, las mismas coordenadas actuadas. Si se introducen sobre el sólido base las reacciones calculadas por dinámica inversa con la perturbación indicada anteriormente, el control en los actuadores permite realizar la simulación con un paso de tiempo de 1 ms, con errores máximos en posición del orden de  $10^{-3}$  en las coordenadas consideradas como salidas. Dado que el movimiento del sólido base no se considera como salida, la perturbación tiene el efecto de acelerar el movimiento de la pelvis del sujeto en dirección longitudinal respecto al movimiento adquirido.

### 5.2. Salidas no coincidentes con coordenadas actuadas

En segundo lugar, se incluye como salida la coordenada longitudinal de la articulación lumbar del modelo, y se elimina de la lista de salidas el ángulo de flexión en el plano sagital del tronco respecto a la pelvis. Introduciendo ahora sobre el sólido base las reacciones calculadas por dinámica inversa junto con la perturbación, el control en los actuadores permite realizar la simulación con un paso de tiempo de 1 ms, con errores en posición del orden de  $10^{-3}$  en las coordenadas consideradas como salidas. Esta vez, el movimiento longitudinal es, por tanto, casi idéntico al adquirido, pero a costa de que el ángulo de flexión en el plano sagital del tronco respecto a la pelvis se desvíe del medido en el experimento.



**Figura 4:** Errores en posición con ángulos articulares como salidas (línea continua), y sustituyendo el ángulo pelvis-tronco por la coordenada longitudinal de la pelvis como salida (línea discontinua).

La figura 4 muestra el error, respecto a los valores capturados, de la coordenada longitudinal de la articulación lumbar y del ángulo de flexión en el plano sagital del tronco respecto a la pelvis, en los dos casos descritos.

## 6. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha abordado el cálculo, mediante dinámica directa y utilizando métodos de control, de los pares articulares que producen un movimiento medido.

Inicialmente, se permite actuar todos los grados de libertad del modelo. En este caso, el método de control de los pares computados (CTC, en inglés) proporciona unos resultados muy precisos, a la vez que se muestra muy robusto en cuanto a la elección de las ganancias.

A continuación, se limita la actuación a los ángulos articulares, como ocurre en la realidad, eliminándose la posibilidad de actuar los seis grados de libertad del sólido base (pelvis o pie de apoyo). En este caso el sistema es infra-actuado, y se pueden imponer tantas salidas como actuaciones. En el artículo se desarrolla la formulación necesaria para considerar como salidas tanto coordenadas del modelo como reacciones exteriores, e incluso se contempla la posibilidad de imponer más salidas que actuaciones en el sentido de mínimos cuadrados ponderados.

El enfoque consistente para el sistema infra-actuado requiere el uso de un modelo de contacto pie-suelo. Sin embargo, en este trabajo, se ha estudiado un problema más asequible, introduciendo sobre el sólido base las reacciones exteriores calculadas por dinámica inversa, alteradas por una perturbación, para representar las perturbaciones que sin duda introducirá el modelo de contacto. Con estas condiciones, se ha probado la opción de imponer tantas salidas como actuaciones, con dos variantes: a) salidas coincidentes con las coordenadas actuadas; b) como el caso anterior, pero incluyendo en las salidas la coordenada que sufre la perturbación, y quitando de la lista un ángulo articular cuya modificación afecta de forma relevante a la coordenada que sufre la perturbación. En ambos casos se consiguen resultados precisos en las salidas y, lógicamente, no tan precisos en las demás coordenadas.

En el futuro se pretende abordar el problema del sistema infra-actuado incorporando el modelo de contacto pie-suelo. Para ello, se debe ajustar el modelo de contacto para que las discrepancias entre las reacciones exteriores que proporcione y las verdaderas reacciones exteriores se mantengan moderadas y no exijan demasiado del control. También hay que investigar cuáles son las salidas que dan lugar a un control más estable, y si compensa imponer más salidas que actuaciones, aunque sea en el sentido de mínimos cuadrados ponderados.

## 7. Agradecimientos

Se agradece el apoyo del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) español a través del proyecto DPI2012-38331-C03, cofinanciado por la Unión Europea a través de los fondos FEDER.

## 8. Referencias

- [1] J.M. Font-Llagunes, R. Pamies-Vila, F.J. Alonso, U. Lugris. Simulation and design of an active orthosis for an incomplete spinal cord injured subject. *Procedia IUTAM*, 2, (2011), 68-81.
- [2] Y. Xiang, J.S. Arora, K. Abdel-Malek. Physics-based modeling and simulation of human walking: a review of optimization-based and other approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42, (2010), 1-23.
- [3] K.C. Gupta. *Mechanics and control of robots*. Springer-Verlag, (1997). ISBN: 0-387-94923-2.
- [4] R. Seifried. Integrated mechanical and control design of underactuated multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 67, (2012), 1539-1557.
- [5] C.L. Vaughan, B.L. Davis, J.C. O'Connor. *Dynamics of human gait*, 2nd ed. Kiboho Publishers, (1999). ISBN: 0-620-23558-6.
- [6] J.A.C. Ambrosio, A. Kecskemethy. Multibody dynamics of biomechanical models for human motion via optimization, *Multibody Dynamics – Computational Methods and Applications*, J.C. Garcia Orden, J.M. Goicolea, J. Cuadrado, Eds. Springer, (2007), 245-272. ISBN: 978-1-4020-5683-3.
- [7] U. Lúgris, J. Carlin, A. Luaces, J. Cuadrado. Gait analysis system for spinal cord injured subjects assisted by active orthoses and crutches. *Journal of Multi-body Dynamics*, 227:4, (2013), 363-374.
- [8] J. Garcia de Jalon, E. Bayo. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer-Verlag, (1994). ISBN: 0-387-94096-0.
- [9] J. Cuadrado, J. Cardenal, P. Morer, E. Bayo. Intelligent simulation of multibody dynamics: space-state and descriptor methods in sequential and parallel computing environments. *Multibody System Dynamics*, 4:1, (2000), 55-73.
- [10] W. Blajer. The use of servo-constraints in the inverse dynamics analysis of underactuated multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, (2014), doi: 10.1115/1.4025855.
- [11] A. Seth, M.G. Pandy. A neuromusculoskeletal tracking method for estimating individual muscle forces in human movement. *Journal of Biomechanics*, 40, (2007), 356-366.