

# Análisis computacional de la estructura cinemática de sistemas multicuerpo espaciales

A. Celdrán Cáceres<sup>1</sup>, M. Saura Sanchez<sup>2</sup>, D. Dopico Dopico<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena. [anaceldrancaceres@gmail.com](mailto:anaceldrancaceres@gmail.com)

<sup>2</sup>Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena. [msaura.sanchez@upct.es](mailto:msaura.sanchez@upct.es)

<sup>3</sup>Laboratorio. de Ingeniería Mecánica. Universidad de A Coruña. [ddopico@udc.es](mailto:ddopico@udc.es)

---

*La determinación de la estructura cinemática de un sistema multicuerpo resulta de gran interés, tanto para la síntesis estructural, relacionada con el diseño del sistema multicuerpo, como para su modelización automática y su análisis cinemático y dinámico computacional mediante formulaciones globales o topológicas, siendo especialmente útil para la aproximación topológica basada en Ecuaciones de Grupo. Esta aproximación utiliza conceptos topológicos para obtener la estructura cinemática de sistemas multicuerpo dividiéndolo, con métodos grafo-analíticos o computacionales, en un conjunto ordenado de cadenas cinemáticas desmodrómicas llamadas Grupos Estructurales. Debido al limitado número de coordenadas necesarias para definir los Grupos y a que se pueden resolver individualmente, en el orden indicado por su estructura cinemática, esta aproximación, a pesar de estar poco extendida y desarrollada, ha demostrado ser más eficiente que otras globales en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo escalables, planos y espaciales. La obtención de la estructura cinemática de un sistema, plano o espacial, por métodos computacionales es el primer paso hacia la modelización y solución automática de sistemas multicuerpo y obtenerla a partir de un sencillo reconocimiento topológico (matriz de adyacencia) mediante una intuitiva interfaz de usuario constituye el objetivo principal de este trabajo, junto con su validación mediante aplicación a un elevado número de sistemas planos y espaciales con distintos tipos de pares cinemáticos.*

---

## 1. Introducción

En el campo de la teoría de mecanismos y máquinas, el análisis estructural de un sistema multicuerpo consiste en el estudio de las relaciones fundamentales entre la movilidad del sistema y los parámetros topológicos que lo definen: número de elementos y número y tipo de uniones definidas entre ellos. Estas relaciones permiten la solución de un amplio tipo de problemas relacionados con la estructura cinemática de los sistemas multicuerpo: análisis de movilidad, síntesis estructural y análisis estructural. La síntesis estructural se ocupa del diseño del mecanismo y el análisis estructural del estudio de su estructura cinemática, es decir, de la descomposición del sistema, atendiendo a ciertos criterios topológicos, en cadenas cinemáticas llamadas grupos estructurales (GE).

La aplicación de la descomposición en grupos estructurales a la síntesis estructural, tanto con métodos grafo-analíticos como con métodos computacionales basados en la teoría de Assur, ha sido ampliamente tratada en la literatura para mecanismos planos y en el diseño de engranajes [1].

Sin embargo, el empleo de métodos basados en la descomposición de grupos estructurales aplicados al análisis cinemático y dinámico de sistemas multicuerpo no ha sido explorado en profundidad. En Saura [2] se enumeran un gran número de ventajas que el método basado en ecuaciones de grupo introduce respecto al software comercial y a la solución directa en mecanismos planos, en relación con el análisis cinemático.

Buskiewicz introduce un algoritmo computacional (SAM) para el análisis cinemático de mecanismos planos con un elemento primario de un grado de libertad y uno o más grupos de Assur. El usuario tiene que introducir la información relacionada con el número de lazos, articulaciones, elementos móviles y los elementos y articulaciones contenidos en cada lazo. El algoritmo identifica automáticamente los grupos Assur y su correspondiente contribución a los elementos de la matriz Jacobiana del sistema completo. El método se prueba sobre mecanismos sencillos.

En los últimos años, la comunidad de la teoría de la rigidez ha reportado métodos computacionales eficientes basados en procesos combinatorios para el análisis estructural de mecanismos planos y su descomposición en grupos de Assur [3], si bien, de momento se limita su aplicación a sistemas articulados planos.

Varbanov introduce la integración de la síntesis cinemática y el análisis cinemático de mecanismos planos compuestos por un elemento primario de un eslabón o cuerpo y un grado de libertad, combinado con diferentes formas de una diada (grupo Assur de Clase I). La estructura cinemática del mecanismo la introduce el usuario junto con la geometría de los elementos del mecanismo y el movimiento de entrada del elemento conductor.

Los trabajos que se han citado limitan su alcance a mecanismos articulados planos. El algoritmo que se propone en este trabajo utiliza métodos computacionales para obtener la estructura cinemática de sistemas multicuerpo planos y espaciales con pares cinemáticos de cualquier tipo y grado, lo que permite extender los métodos de la síntesis estructural y avanzar en la modelización automática de sistemas multicuerpo de cualquier grado de complejidad.

## 2. Modelización computacional del sistema multicuerpo

El primer paso en el análisis cinemático y dinámico computacional consiste en la modelización del sistema multicuerpo mediante la definición de un conjunto de coordenadas que describan la posición y orientación de todos los cuerpos en cada instante de tiempo, junto con las correspondientes ecuaciones de restricción que relacionen dichas coordenadas. Esta primera etapa de modelización es compleja y necesita de cierta cualificación para resolverla con éxito.

El análisis cinemático o dinámico puede llevarse a cabo mediante el uso de una formulación global o topológica. Las formulaciones globales se basan en un simple reconocimiento de la topología del sistema multicuerpo y el conjunto de coordenadas y ecuaciones de restricción se derivan de manera sistemática [4]. En contrapartida, el número de coordenadas necesarias para definir por completo el modelo es considerable y las elevadas dimensiones de las matrices y vectores necesarios para el análisis ralentizan el análisis. Las formulaciones topológicas aprovechan la topología del sistema multicuerpo, bien para modelizarlo con un conjunto de coordenadas más reducido, o bien para dividir esas matrices y vectores en subsistemas de dimensiones más reducidas, disminuyendo el coste computacional del análisis. La apertura de los lazos-cerrados del sistema es una de las aproximaciones topológicas más empleadas [5]. Aunque suele depender de la topología del problema en cuestión, la aproximación topológica es normalmente más eficiente que la aproximación global.

Otro enfoque topológico es el basado en *ecuaciones de grupo*. La estructura cinemática del sistema multicuerpo, obtenida mediante métodos grafo-analíticos o computacionales [6], dividen el mecanismo en un conjunto determinado de cadenas cinemáticas (*grupos estructurales*) en un orden específico, que determina las relaciones de dependencia entre ellas.

La modelización automática de los sistemas multicuerpo elimina la necesidad de analistas altamente cualificados, disminuye considerablemente el tiempo dedicado a la modelización y evita un elevado número de errores que se suelen cometer en esta fase del análisis. Sin embargo, la complejidad de los métodos necesarios para la modelización automática de sistemas multicuerpo depende del tipo de coordenadas seleccionadas para su definición y de la formulación empleada para resolver su cinemática y dinámica. Aunque la formulación global es la más adecuada para la modelización automática de sistemas multicuerpo, trabajos recientes [7] han demostrado que la aproximación topológica basada en ecuaciones de grupo es más eficiente en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo escalables, planos y espaciales, debido al manejo de matrices y vectores de reducidas dimensiones y la posibilidad de incluir soluciones simbólicas para éstos. Además, este enfoque puede emplearse para resolver tanto problemas de análisis como de síntesis, lo cual es una ventaja respecto a otra aproximación topológica como es la de lazo-cerrado.

Las razones mencionadas en los párrafos anteriores, justifican la necesidad de desarrollar métodos para la modelización automática mediante la descomposición en grupos estructurales. Para desarrollar estos métodos es necesario, primeramente, automatizar el análisis estructural.

## 3. Análisis estructural: obtención de la estructura cinemática

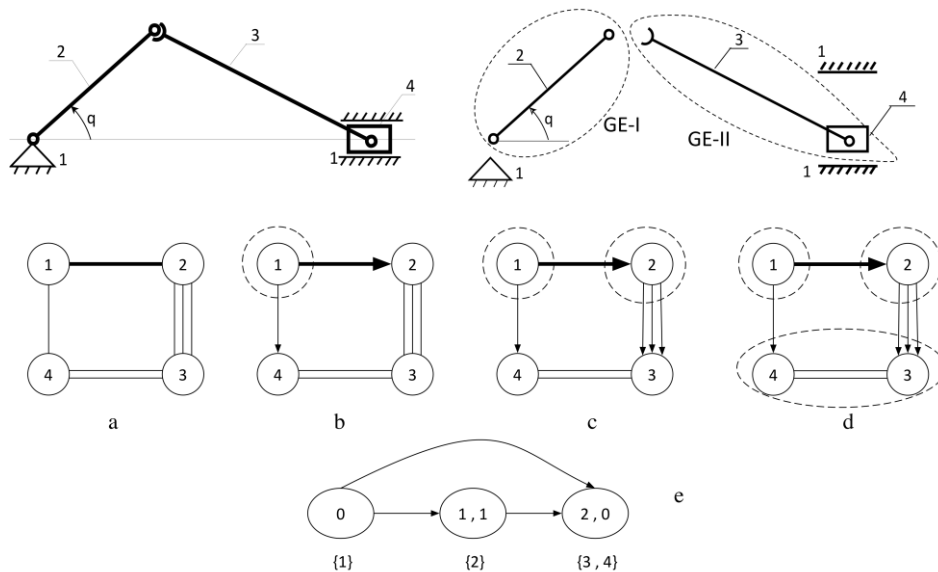
Para abordar el análisis cinemático o dinámico mediante la aproximación topológica basada en *ecuaciones de grupo* es necesario obtener la estructura cinemática del sistema multicuerpo. El concepto clave en el análisis estructural computacional es la definición de *grupo estructural* (GE) como una cadena cinemática en la cual, el número de coordenadas independientes ( $n_c$  o *líneas gruesas* en los métodos grafo analíticos) es igual a su movilidad ( $L_c$ ) y no puede ser dividido en un grupo estructural más pequeño. Aplicando el criterio de Kutzbach-Grübler para determinar la movilidad de una cadena cinemática y la definición de GE, se obtiene la ‘condición de grupo estructural’ (1).

$$S_c - n_c = n \times (P - N_m) \quad (1)$$

Donde  $S_C$  indica el número de grados de libertad (GDL) permitidos por los  $P$  pares cinemáticos (representados por tantas líneas como GDL exista entre los elementos en los métodos grafo analíticos) formados por sus  $N_m$  elementos móviles (representados por círculos en los métodos grafo analíticos). El parámetro  $n$  será igual a 3 ó 6 para mecanismos planos o espaciales respectivamente. Los métodos grafo-analíticos para el análisis estructural emplean dicha expresión junto con la teoría de grafos para obtener gráficamente la estructura cinemática de un mecanismo (grafo estructural).

Como resultado del análisis estructural, la estructura cinemática a través de su diagrama estructural muestra la descomposición del sistema multicuerpo y la dependencia entre los diferentes GE.

Aunque en [6] se presenta de manera detallada la metodología grafo-analítica seleccionada en este trabajo para determinar la estructura cinemática de mecanismos planos, veamos su implementación para el mecanismo espacial tipo manivela-biela-corredera de la figura 1. En este mecanismo se identifican: 3 eslabones móviles y uno fijo, el bastidor ( $N = 4$ ), 4 pares cinemáticos y un movimiento de entrada conocido (rotación  $q$  del eslabón 2 respecto al bastidor 1). Los pares identificados son: Rotación 1-2, esférico 2-3, cilíndrico 3-4 y prismático 1-4. Esta topología se representa mediante el grafo estructural (figura 1.a.).



**Figura 1:** Análisis estructural mediante método grafo analítico del mecanismo espacial compuesto por una manivela-biela-corredera.

Una vez obtenido el grafo estructural (figura 1.a) el análisis estructural basado en el método grafo-analítico se resume en los siguientes pasos, aplicados al mecanismo de la figura 1.

**Paso 1:** Aislar el bastidor.

**Paso 2:** Cesión de GDL (figura 1.b y 1.c). El bastidor o los sólidos de GE recién formados ceden los grados de libertad o enlaces hacia los sólidos con los que forman par. Esta asignación se representa mediante una flecha. Aquí, el bastidor cede GDL a los sólidos 2 y 4. Los eslabones que reciben estos enlaces se convierten en candidatos a formar GE y dichos enlaces se contabilizarán como pares externos en el cómputo de pares necesarios para la obtención del parámetro  $P$  en (1).

**Paso 3:** Buscar GE compuestos por el mínimo número de elementos. Se comprueba, sistemáticamente, si cada uno de los eslabones candidatos cumple la ecuación (1). Aquí se selecciona el elemento 2 para comenzar dicha comprobación:  $P=1$  (el par externo {1 2});  $S_C=1$  (par de rotación (1 GDL));  $n_C=1$  y  $N_m=1$ . Sustituyendo en la ecuación 1 resulta:  $1 - 1 = 6 \cdot (1 - 1)$ , el sólido 2 es GE.

Se repetirán los pasos 2 y 3 hasta que todos los elementos formen parte de algún grupo estructural, obteniendo así la estructura cinemática del mecanismo representada por su diagrama estructural (ver figura 1.e).

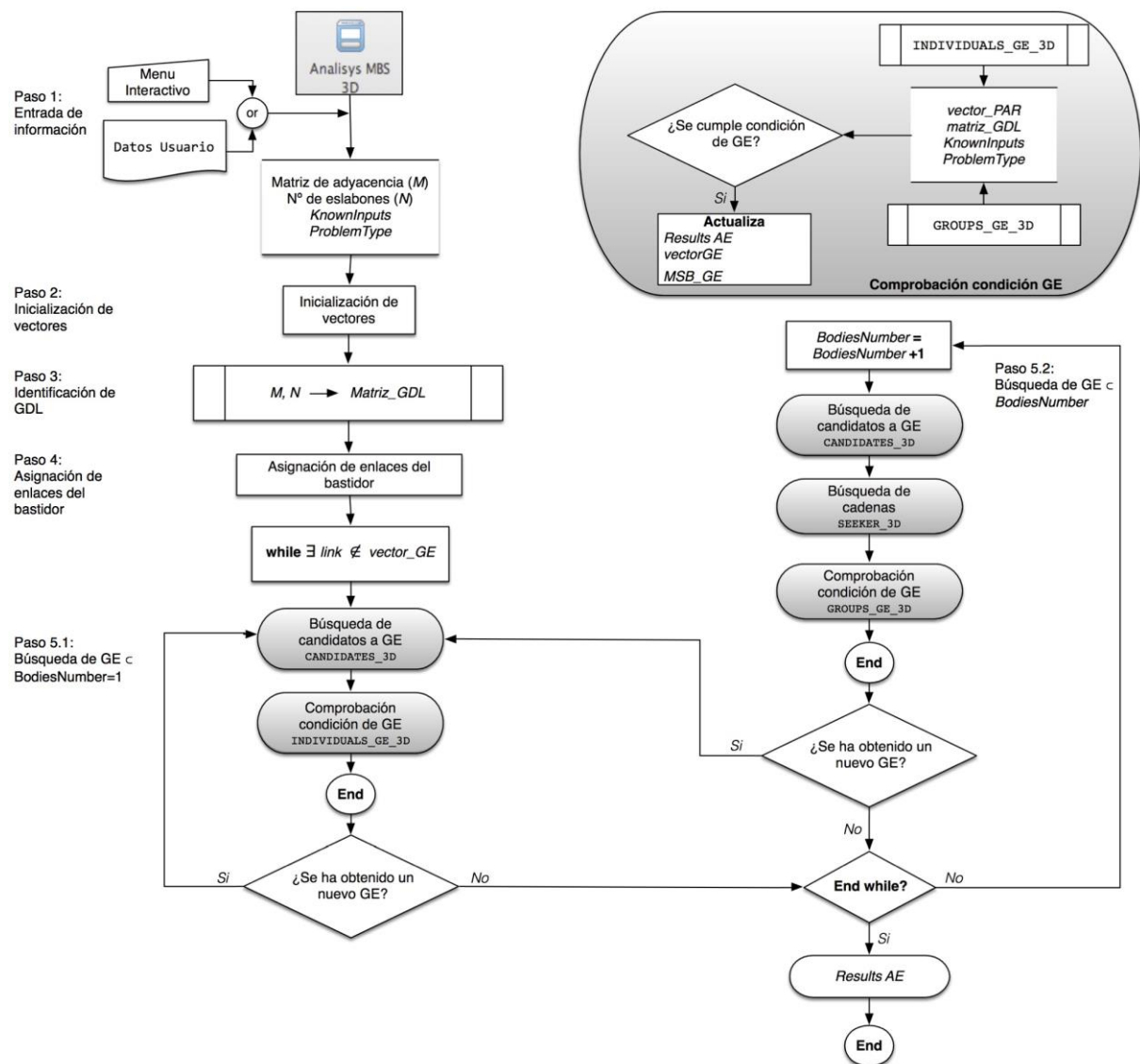
Se puede comprobar cómo tras la cesión de enlaces del GE formado por el elemento 2, los elementos 3 y 4, que son candidatos no cumplen por si solos la condición de grupo estructural. Sin embargo, el conjunto formado por ellos sí:  $P=3$  (los pares externos {1 4} y {2 3} y el par interno {3 4});  $S_C=6$  (par esférico (3 GDL), cilíndrico (2

GDL) y prismático (1 GDL));  $n_c = 0$  y  $N_m = 2$ . Sustituyendo en la ecuación 1 resulta:  $6 - 0 = 6 \cdot (3 - 2)$ , los sólidos 3 y 4 son un GE (figura 1.d).

Teniendo en cuenta (1) y como motivación de este trabajo, se ha desarrollado un algoritmo basado en la secuencia que sigue el método grafo analítico expuesto para obtener la estructura cinemática de sistemas multicuerpo planos y espaciales (análisis estructural computacional) con cualquier grado de libertad como primera etapa de una modelización automática basada en su aproximación topológica.

#### 4. Método y algoritmo para el análisis estructural computacional 3D

En este apartado se presenta el algoritmo desarrollado e implementado para obtener la estructura cinemática de cualquier mecanismo plano o espacial a partir de la introducción, por parte del usuario, de ciertas características topológicas que definen al mecanismo bajo estudio y que se explicarán a lo largo de esta sección. El diagrama de flujo del algoritmo se muestra en la figura 2.



**Figura 2:** Diagrama de flujo del algoritmo para la obtención computacional de la estructura cinemática de un sistema multicuerpo.

El algoritmo para el análisis estructural computacional que se presenta en este trabajo tiene como punto de partida los conceptos teóricos descritos en los apartados anteriores así como el método computacional presentado en trabajos previos para mecanismos planos [6] junto con la implementación de mejoras en la eficiencia del algoritmo del método propuesto donde se han tratado los aspectos negativos detectados durante su empleo como parte del análisis cinemático y dinámico de mecanismos planos, así como la reducción del coste computacional.



### 4.3. Identificación de grados de libertad

Para el cálculo de la condición de grupo estructural y tal y como se vio en el apartado 2.1, será necesario el cálculo de los grados de libertad  $S_C$  permitidos por los pares  $P$  en los que el eslabón bajo estudio participa así como el número de movimientos de entrada conocidos del eslabón. Por lo que tras la inicialización de vectores, se continuará con el procesamiento de la matriz  $M$  para extrapolar los grados de libertad que hay en cada tipo de cada par y almacenarlos en una nueva matriz  $Matriz_{GDL}$  como punto de partida del método computacional propuesto que para el mecanismo de la figura 1 queda como se muestra en la figura 4.c.

### 4.4. Asignación de enlaces del bastidor

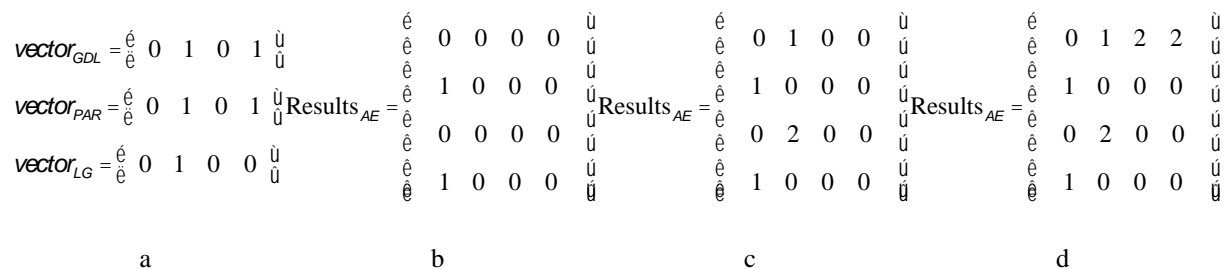
Como se vio en el apartado 3, el primer paso para la obtención de los grupos estructurales, es la cesión, desde el bastidor, de los enlaces que éste posee con los eslabones móviles del mecanismo. Para ello, el script principal recorre la matriz  $Matriz_{GDL}$  donde, en el paso anterior, se habían almacenado los grados de libertad que existían entre cada par de eslabones según el enlace existente entre ellos. De tal forma que, recorriendo la primera fila de dicha matriz, el script identifica qué eslabones tiene par con el bastidor.

Una vez identificados estos eslabones, se modificarán los vectores  $vector_{PAR}$  y  $vector_{GDL}$ , de manera que, en la posición del vector correspondiente al número de eslabón ( $i$ ) al que el bastidor le ha cedido un enlace, se añadirá: por un lado, al vector  $vector_{PAR}$  un 1, indicando que dicho eslabón forma parte de un par (el formado con el bastidor) válido para contabilizarlo en la condición de grupo estructural; y por otro lado, al vector  $vector_{GDL}$ , se añaden los grados de libertad que posee el par del eslabón con el bastidor, extraídos de la matriz  $matriz_{GDL}$ .

A su vez, en la primera columna de la matriz  $Results_{AE}$  y para fila igual al número de eslabón al que el bastidor le ha cedido un enlace ( $i$ ), se añadirá un 1, indicando que el bastidor ha cedido el primer enlace a estos eslabones.

Por otra parte, al igual que se computan los pares existentes con el bastidor, también, se contabilizan de manera similar los movimientos de entrada conocidos, mediante la matriz  $KnownInputs$ , que existan entre el bastidor y los eslabones móviles y se almacenan en la posición correspondiente ( $i$ ) en el vector  $vector_{LG}$ .

Aplicando este paso al mecanismo de la figura 1, se tienen los resultados de manera vectorial (ver figura 5.a y 5.b) y que pueden compararse con los obtenidos por métodos gráficos de la figura 1.a.



**Figura 5:** Resultados matriciales de la aplicación del método computacional al mecanismo de la figura 1 en los diferentes pasos del algoritmo.

### 4.5. Generación de grupos estructurales

Tras este proceso de asignación de enlaces del bastidor, el script principal entra un bucle *while-end*, el cual no finaliza hasta que todos los eslabones móviles hayan sido asignados o pertenezcan a un grupo estructural. Este bucle obtiene como resultado la matriz  $Results_{AE}$  que contiene la solución al análisis estructural del mecanismo.

Primeramente se establecen dos banderas o "flags" (*flag1* y *flag2*) encargadas de calcular si se han generado nuevos grupos estructurales o no. Dado que se denomina grupo estructural a la mínima unidad en la que puede dividirse el mecanismo que cumpla la ecuación de Grübler; siempre que se obtenga un nuevo grupo estructural, la búsqueda del siguiente grupo debe comenzar de nuevo comprobando si existen grupos estructurales formados por un solo eslabón, y solo en el caso de no existir ninguno, se incrementará de unidad en unidad (mediante la variable *BodiesNumber*) el número de eslabones que deben comprobarse que forman grupo estructural.

Por tanto, una vez comprendido el funcionamiento de las banderas que rigen el comportamiento de esta parte del algoritmo, se podría decir que éste queda dividido en dos grandes partes, una encargada de comprobar la condición de grupo estructural para la generación de grupos estructurales formados por un único eslabón (INDIVIDUALS\_GE\_3D); y otra, encargada de la búsqueda (SEEKER\_3D) y comprobación de grupos estructurales formados por más de un eslabón (GROUPS\_GE\_3D). Común a ellas, se tiene el script (CANDIDATES\_3D), cuya misión es la de proporcionar a las funciones encargadas de la comprobación de

grupos estructurales, aquellos eslabones en disposición de serlo, es decir, aquellos que hayan recibido un enlace proveniente de un par con el bastidor o de un grupo estructural ya formado, y no formen aún parte de ningún grupo estructural. El resultado final le será mostrado al usuario mediante una interfaz gráfica.

Volviendo al mecanismo de la figura 1, los candidatos a grupo estructural son los elementos 2 y 4 por haber recibido enlaces del bastidor y sustituyendo las componentes (*i*) para *i* = 2 y 4 de los vectores que intervienen en la comprobación de condición de grupo estructural:  $vector_{GDL}$ ,  $vector_{PAR}$  y  $vector_{LG}$  en la expresión (1) en los términos  $S_C$ ,  $P$  y  $n_C$  respectivamente y para  $n=6$  se comprueba como el elemento 2 si cumple la condición de grupo estructural, mientras que el 4 no.

$$S_C - n_C = n \cdot (P - N_m) \xrightarrow{i=2} 1 - 1 = 6 \cdot (1 - 1) = 0$$

$$S_C - n_C = n \cdot (P - N_m) \xrightarrow{i=4} 1 - 0 \neq 6 \cdot (1 - 1)$$

Convirtiéndose así en el primer grupo estructural, el cual cede sus enlaces, en este caso al eslabón 3; actualiza la matriz de resultados y comienza una nueva iteración del algoritmo (ver figura 5.c). Este paso corresponde al método gráfico analítico a la figura 1.c.

A continuación, el algoritmo comprobará la condición de grupo estructural para los candidatos 3 y 4 que previamente la función CANDIDATES\_3D ha encontrado, obteniendo que no la cumplen:

$$S_C - n_C = n \cdot (P - N_m) \xrightarrow{i=3} 3 - 0 \neq 6 \cdot (1 - 1)$$

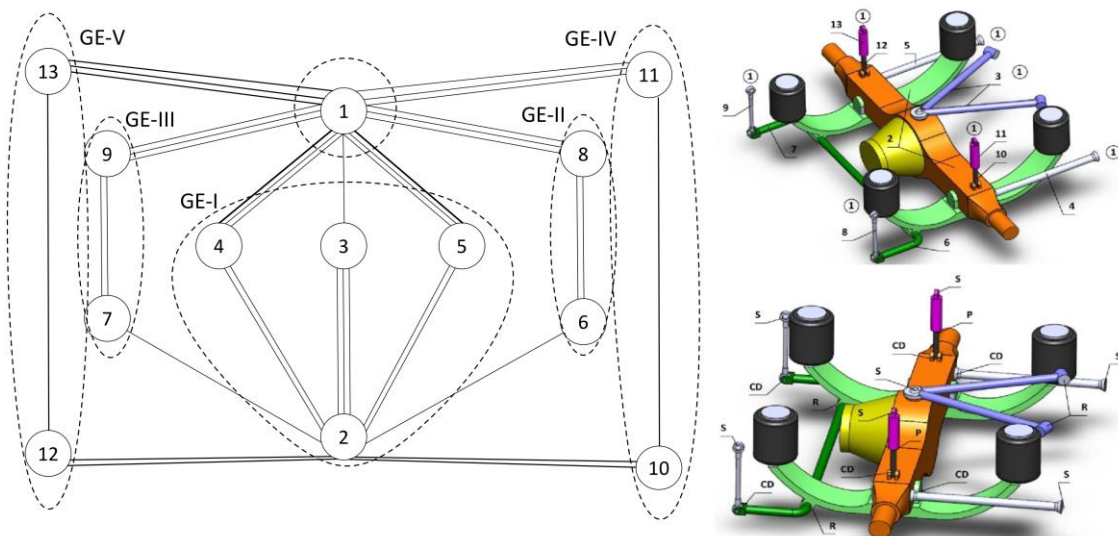
Motivo por el cual, se incrementará en una unidad el número de eslabones que compondrán el grupo estructural, es decir, se buscarán cadenas de 2 eslabones que cumplan la condición de grupo estructural formadas por al menos un candidato. Mediante la función SEEKER\_3D, se obtendrá la cadena {3 4} que en su conjunto si satisface la condición de grupo estructural comprobado por la función GROUPS\_GE\_3D donde los valores a introducir en los parámetros de la ecuación (1) vendrá dada ahora por la contribución de las componentes de los vectores correspondientes a cada eslabón:

$$S_C - n_C = n \cdot (P - N_m) \xrightarrow{i=3+i=4} 6 - 0 = 6 \cdot (3 - 2)$$

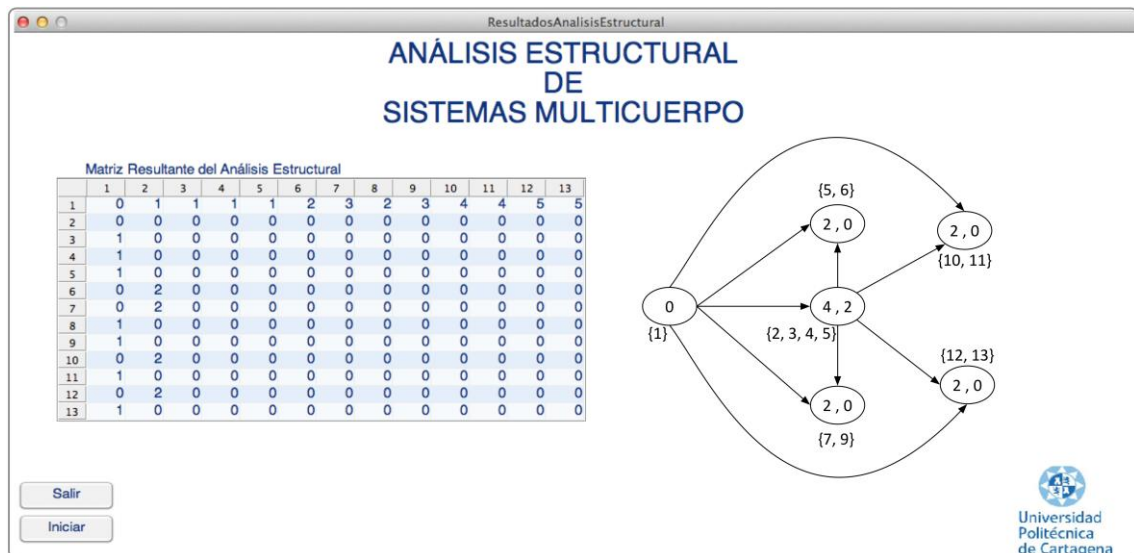
Se confirma que {3 4} forman el último grupo estructural del mecanismo y se actualiza la matriz de resultados final (ver figura 5.d) mostrándola gráficamente al usuario mediante la interfaz gráfica que se ha programado junto con el algoritmo.

### 5. Aplicación del método computacional

La figura 6 muestra la aplicación del método propuesto al sistema de suspensión del eje de un camión. Se trata de un sistema 3D con dos grados de libertad, trece cuerpos y dieciocho pares: siete esféricos (S), tres de rotación (R), dos prismáticos (P) y seis cardan (CD). En la figura 6 se muestra el grafo estructural y la representación gráfica del sistema. En la figura 7 se muestra el resultado del método y diagrama estructural.



**Figura 6:** Análisis estructural computacional en un sistema de suspensión aplicando el método computacional propuesto en este trabajo.



**Figura 7:** Resultado del análisis estructural del sistema de suspensión mostrado en la figura 6. Solución computacional (izda), y grafo-analítica (dcha).

## 6. Conclusiones

El método computacional presentado en este trabajo permite la obtención de la estructura cinemática de sistemas multicuerpo planos y espaciales con cadenas cinemáticas abiertas y cerradas y con uno o varios grados de libertad. Para llevarlo a cabo, la única información de la que se precisa es la introducción, por parte del usuario, de un reconocimiento topológico básico del mecanismo, ya sea mediante un script previamente programado, o mediante una interfaz gráfica. Este análisis consiste en la definición del tipo de par en el que participa cada eslabón del sistema mecánico y de los movimientos de entrada definidos entre sus eslabones.

El algoritmo ha sido compilado en una APP MATLAB con una interfaz gráfica para la interacción con el usuario e implementado con éxito sobre mecanismos de diferente complejidad. Así mismo, el método propuesto en este trabajo presenta las siguientes mejoras con respecto a los actualmente propuestos en la bibliografía:

- Caracterización del tipo de par según los grados de libertad, lo que facilitará la generación futura de librerías para el análisis cinemático.
- Adaptación automática del algoritmo para la resolución tanto de mecanismos planos como espaciales, con pares cinemáticos de cualquier tipo.

## 7. Referencias

- [1] S. Li. Computer-aided structure synthesis of spatial kinematic chains. *Mechanism and Machine Theory*, 25 (1990), 645–653.
- [2] M. Saura. Utilidad del análisis estructural en el análisis cinemático de mecanismos articulados planos, Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Cuba, (2005).
- [3] M. Terushkin, O. Shai. Applying rigidity theory methods for topological decompositions and synthesis of gear trains systems, *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, (2012).
- [4] J. G. Jalon, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*. Springer-Verlag, (1993).
- [5] J. Cuadrado, D. Dopico, M. Gonzalez, M. A. Naya. A combined penalty and recursive real-time formulation for multibody dynamics. *Journal of Mechanical Design*, 126 (2004), 602–608.
- [6] M.Saura, A.Celdrán, D.Dopico, J.Cuadrado. Computational structural analysis of planar multibody systems with lower and higher kinematic pairs. *Mechanism and Machine Theory*, 71 (2014), 79–92.
- [7] M.Saura, A.Celdrán, D.Dopico, J.Cuadrado. Computational kinematics of multibody systems: The advantages of a topological method based on its kinematic structure. *ECCOMAS Multibody Dynamics*, Croacia (2013), 655–664.