

Eficiencia de una formulación cinemática computacional basada en Ecuaciones de Grupo

P. Segado Cabezos¹, M. Saura Sánchez¹, D. Dopico Dopico², P. Martínez Ibáñez¹

¹Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena. {pablo.segado, msaura.sanchez, pedro.martinez}@upct.es

²Escuela Politécnica Superior. Universidad de La Coruña. ddopico@udc.es

Las formulaciones cinemáticas computacionales más utilizadas tradicionalmente para modelizar y analizar sistemas multicuerpo compiten entre sí en términos de eficiencia computacional, por su utilidad en aplicaciones de tiempo real, robustez, para dar solución a un amplio abanico de problemas, y generalidad, para facilitar la modelización automática del sistema a analizar. En este sentido, las formulaciones cinemáticas topológicas se consideran muy eficientes pero poco generalistas, mientras que las formulaciones globales permiten una gran automatización en la generación de modelos, a costa de una pérdida de eficiencia. En este trabajo se presenta una formulación cinemática topológica, basada en Ecuaciones de Grupo, que permite una solución eficiente y, al mismo tiempo, facilita la modelización automática de sistemas multicuerpo. El objetivo principal de este trabajo consiste en comparar la eficiencia de la formulación basada en Ecuaciones de Grupo respecto a una conocida formulación global. Utilizando una modelización en coordenadas naturales de dos sistemas multicuerpo escalables, con hasta 550 coordenadas, se compara la eficiencia en el análisis cinemático computacional de cuatro variantes basadas en Ecuaciones de Grupo respecto a una formulación global tomada como referencia. La conclusión principal de este análisis muestra que el método topológico propuesto ofrece una mayor modularidad, flexibilidad y eficiencia que el método global.

1. Introducción

El análisis cinemático computacional juega un papel fundamental en el estudio de sistemas mecánicos. No sólo es una parte necesaria en las formulaciones dinámicas multicuerpo, sino que también se utiliza, frecuentemente, en etapas tempranas del diseño de sistemas mecánicos (síntesis dimensional y/o cinemática), o a veces por puro interés en el estudio de parámetros cinemáticos del sistema multicuerpo (MBS): análisis de posiciones, rango de movimiento, ángulos de transmisión, etc. Normalmente se utilizan dos familias diferentes de formulaciones en el análisis de MBS: global y topológica.

En la aproximación global, un simple análisis del número de sólidos y de los grados de libertad que se eliminan en sus respectivas uniones es suficiente para identificar un vector de coordenadas dependientes (punto de referencia, naturales o mixtas) que definen completamente al sistema, ej. $[x_B \ y_B \ x_C \ y_C \ \theta_1]$ en la fig. 1.a. Estas coordenadas dependientes se relacionan entre sí mediante las correspondientes ecuaciones de restricción debido a las condiciones de sólido-rígido y de par cinemático.

La aproximación topológica requiere un estudio detallado de la estructura cinemática del MBS para realizar un análisis cinemático. Existen diferentes formulaciones que explotan la topología del MBS. En el método basado en identificación de lazos cerrados, éstos se abren para dejar al sistema en estructura de árbol (fig. 1.b) de forma que se pueden definir relaciones cinemáticas entre sólidos adyacentes dependiendo del tipo de unión entre ellos. Estas relaciones junto con las ecuaciones de cierre de lazo relacionan las coordenadas dependientes ($\theta_2 \ \theta_3$) e independientes (θ_1) que definen al sistema [1-3]. En el método basado en Ecuaciones de Grupo, el MBS se divide en un conjunto ordenado de cadenas cinemáticamente determinadas (desmodrómicas), ej. SG-I y SG-II, fig. 1.c, de forma que cada una de ellas está definida por un conjunto de coordenadas dependientes (coordenadas de grupo: SG-I: $\theta_1 \ x_B \ y_B$, SG-II: $x_C \ y_C$) relacionadas por el correspondiente vector de ecuaciones de restricción (ecuaciones de grupo).

Respecto a estas dos familias de formulaciones cinemáticas existe un interés permanente en la comunidad científica en mejorar su eficiencia, en términos de coste computacional, y en facilitar la modelización matemática y la resolución automática de cualquier tipo de sistema multicuerpo. La formulación global es la más adecuada para la modelización automática [4-8], pero a expensas de su eficiencia. Las formulaciones topológicas basadas en la descomposición en lazos cerrados independientes [1-3,9,10] son más eficientes pero menos

generalistas. La aproximación basada en ecuaciones de grupo combina las ventajas de ambas formulaciones pudiendo ser útil para ocupar el hueco que dejan las otras dos: global y topológica.

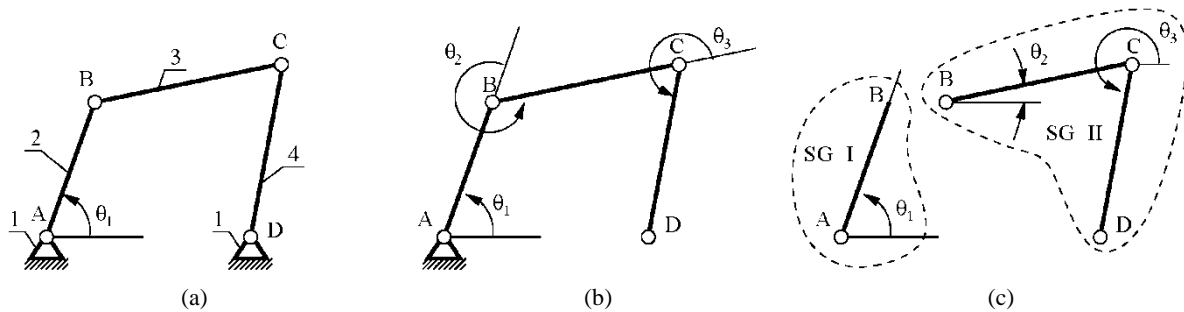


Figura 1: (a) Cuadrilátero articulado con entrada θ_1 , (b) Cuadrilátero en estructura de árbol y coordenadas dependientes $[\theta_1 \theta_2 \theta_3]$, (c) división del cuadrilátero en grupos: SG-I y SG-II y coordenadas de grupo.

Los objetivos principales de este trabajo son: introducir y evaluar la eficiencia de una formulación cinemática basada en la estructura cinemática del MBS. Con este fin, en el apartado 2 se definen los conceptos básicos del análisis estructural, se introduce un algoritmo que resuelve la cinemática de un MBS utilizando su estructura cinemática y se definen dos casos de estudio utilizados para analizar las capacidades y eficiencia del método propuesto. En el apartado 3 se presentan y discuten los resultados derivados del análisis de los casos de estudio y en el apartado 4 se establecen las principales conclusiones a que ha dado lugar este estudio.

2. Material y métodos

En sistemas holónomos, una cadena cinemática está cinemáticamente determinada (es desmodrómica) si, del vector de coordenadas que define la posición de todos sus eslabones se controlan un número n_c de coordenadas igual a la movilidad L_c (grados de libertad, GDL) de la cadena. La teoría de Análisis Estructural define un Grupo Estructural (GE) como una cadena cinemática desmodrómica ($n_c = L_c$). Las cadenas cinemáticas que satisfacen esta condición y no tienen excesivas restricciones o grados de libertad adicionales debidos a consideraciones geométricas especiales, se definen como GE normales [11] o estáticamente determinados [12]. Los GE que no se pueden dividir en GE con menor número de sólidos se denominan GE simples. De la condición de GE simple y utilizando el criterio de Grübler para determinar la movilidad de las cadenas cinemáticas, se obtiene la expresión (ec. 1) que permite comprobar si una cadena cinemática puede formar un GE. En (1), S_c indica el número de GDL permitidos por los P pares cinemáticos formados por los N_m eslabones móviles de la cadena.

$$S_c - n_c = 3 \cdot (P - N_m) \quad (1)$$

La estructura cinemática de un MBS identifica cuál es el conjunto ordenado de GE de que está compuesto. Se pueden utilizar métodos gráfico-analíticos [11] o computacionales [13] para la obtención de la estructura cinemática de un MBS. En [14] se utiliza un método gráfico-analítico para el análisis de la topología de mecanismos aplicado al cuadrilátero articulado. Este análisis estructural da como resultado el diagrama estructural (figuras 3.b y 4.b), que representa la estructura del mecanismo y se compone de tantos elementos como GE se divide el mecanismo más uno, el correspondiente al bastidor (0). Los dos parámetros dentro de cada círculo (N_m, n_c) corresponden, respectivamente, al número de sólidos móviles y de coordenadas controladas del GE. Una flecha une dos círculos en el diagrama, si entre cualquiera de sus sólidos existe par cinemático; su dirección se obtiene durante el análisis estructural e indica el orden en que se han obtenido los GE, definiendo la secuencia de resolución de su cinemática.

2.1. Análisis Computacional basado en Ecuaciones de Grupo

La secuencia general en el análisis cinemático de un MBS se muestra en la fig. 2.a. Después de cargar el fichero de datos que define el modelo del MBS, el programa principal incluye tres bucles. En cada paso de tiempo (primer bucle) el tiempo de ejecución se aumenta y se definen los valores de las variables independientes de todo el sistema. Entonces, para cada GE de la estructura cinemática (segundo bucle), se identifica el GE y, en función de su tipo (tercer bucle), se utiliza la subrutina adecuada para resolver su cinemática. El algoritmo mostrado en la fig. 2.b muestra el aspecto de la subrutina 3RSG llamada por el programa principal encargada de resolver la cinemática de un GE formado por dos sólidos y tres pares de rotación.

Para resolver cada GE, se establece un vector de coordenadas de grupo \mathbf{q}_G y se definen las correspondientes ecuaciones de restricción Φ que las relacionan, a nivel de posiciones. Cada subrutina de análisis cinemático se programa de forma específica según la topología del GE a resolver, de acuerdo a los siguientes pasos:

<pre> %Read data MBS; MBDatos; %MBS Kin. analysis%% for t = t0 : timeStep : tf do /* set indep. values */ z = z + Δz for ng = 2 : length(MGroups) do /* solve each SG */ switch MGroups(ng).kind do case MGroups(ng).kind == 1RSG do CALL Solve_1RSG(*ARGS) case MGroups(ng).kind == 3RSG do CALL Solve_3RSG(*ARGS) end end end end </pre>	<pre> Solve_3RSG(*ARGS) /* funct.CALL */ %% I. Position problem %% evaluate Φ → mFi error = norm(Φ) while error > tolerance do evaluate Φ_q → Jacob extract Φ_q^d solve q_k^d = q_{k-1}^d - (Φ_q^d)_{k-1}⁻¹ · Φ_{k-1} evaluate Φ → mFi error = norm(Φ) end %% II. Velocity problem %% evaluate Φ_q → Jacob extract Φ_q^d; extract Φ_qⁱ solve q̇^d = - (Φ_q^d)⁻¹ Φ_qⁱ q̇ⁱ %% III. Acceleration problem %% evaluate Φ_q q̇ → Fiqqq evaluate - [Φ_qⁱ q̇ⁱ + Φ_q q̇] solve q̈^d = - (Φ_q^d)⁻¹ [Φ_qⁱ q̇ⁱ + Φ_q q̇] </pre>
(a)	(b)

Figura 2: Algoritmos correspondientes a la solución mediante GE: (a) aspecto de la función principal del algoritmo, (b) detalle de la subrutina de cálculo cinemático del grupo 3R.

1. Identificación de coordenadas de grupo y parámetros: se define un sistema local de coordenadas solidario a cada eslabón y se selecciona un vector de coordenadas adecuado (naturales, de punto de referencia o relativas) que define la cadena cinemática. Este vector se divide en dos subgrupos de coordenadas: dependientes $\boldsymbol{\varphi}$ e independientes \mathbf{h} . Deben identificarse otros parámetros que dependen del tipo de GE a resolver a partir de la geometría del problema y los resultados del análisis estructural; ej. puntos de referencia necesarios para identificar las coordenadas \mathbf{h} , dimensiones de los sólidos, etc.
2. Resolución del problema de posición del GE: Se definen las ecuaciones de restricción que relacionan las coordenadas del grupo entre. Se obtiene la matriz Jacobiana Φ_{φ} de las restricciones establecidas respecto a las coordenadas dependientes y se utiliza un método iterativo Newton-Raphson para obtener el valor de las coordenadas dependientes en cada paso de iteración k .

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \rightarrow (\Phi_{\varphi})_{k-1} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_k - \boldsymbol{\varphi}_{k-1}) = -\Phi_{k-1} \quad (2)$$

3. Resolución del problema de velocidad: las velocidades de las coordenadas independientes del grupo $\dot{\mathbf{h}}$ son conocidas, por lo que se puede formular el problema de velocidad derivando las ecuaciones de restricción respecto del tiempo, y resolviendo para las velocidades dependientes (3). Los términos del Jacobiano Φ_{φ} y $\Phi_{\mathbf{h}}$ pueden obtenerse de forma analítica en grupos 2D y 3D con un número reducido de restricciones.

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \rightarrow \Phi_{\varphi} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -[\Phi_{\mathbf{h}} \cdot \dot{\mathbf{h}}] \quad (3)$$

4. Resolución del problema de aceleración: una vez determinadas las velocidades, y conocidas las aceleraciones de las coordenadas independientes del grupo $\ddot{\mathbf{h}}$, pueden determinarse las aceleraciones dependientes derivando el problema de velocidad con respecto del tiempo (4).

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \rightarrow \Phi_{\varphi} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = -[\Phi_{\mathbf{h}} \cdot \ddot{\mathbf{h}} + \Phi_{\mathbf{q}_G} \cdot \dot{\mathbf{q}}_G] \quad (4)$$

- Resolución cinemática de otros puntos de interés (POI): en ocasiones puede resultar de interés determinar la cinemática de otros puntos del sistema (ej. centro de masa, o puntos de referencia para otros GE). La posición, velocidad y aceleración de POI que pertenezcan a cualquier sólido del GE se pueden obtener fácilmente utilizando las ecuaciones cinemáticas de sólido-rígido.

2.2. Casos de estudio

Para analizar las ventajas y desventajas de la formulación topológica basada en Ecuaciones de Grupo con respecto a una formulación global se utilizan dos sistemas mecánicos escalables (en el sentido de que se pueden incrementar a voluntad el número de coordenadas que definen el modelo): un sistema plano, el cuadrilátero articulado, y otro tridimensional, la suspensión de camión.

- Cuadrilátero articulado: mecanismo plano (fig 3.a) formado por una manivela $\overline{A_1B_1}$, una barra $\overline{B_1C_1}$ y un balancín $\overline{C_1D_1}$. Para aumentar el tamaño del problema es suficiente con incrementar el número k de diadas en el modelo. Cada diada introduce dos nuevos cuerpos: $(2k+1)$ y $(2k+2)$, unidos internamente mediante la junta C_k y fijado a la diada previa y al bastidor en la articulaciones B_k y D_k respectivamente. El movimiento de entrada o GDL controlado se define a velocidad constante de $\dot{\theta}_1=1\text{rad/s}$. Todas las longitudes se establecen en 6, excepto $\overline{A_1B_1}=2$.

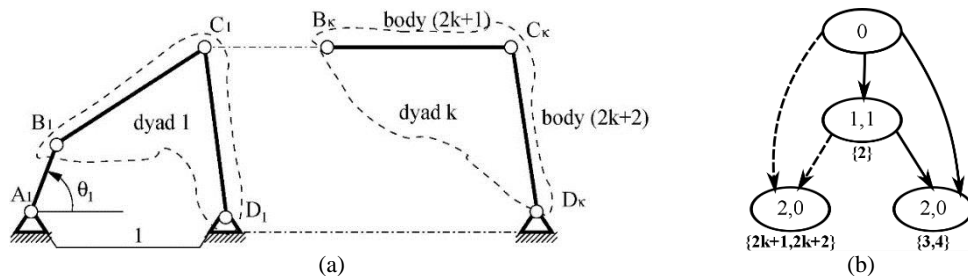


Figura 3: Sistema cuadrilátero articulado escalable: (a) Identificación de sólidos y principales coordenadas, (b) diagrama estructural que muestra el orden de resolución.

- Suspensión de camión: Para aumentar el tamaño del problema es suficiente con incrementar el número de ejes simulados. Cada uno de estos ejes es un MBS de dos GDL formado por 13 sólidos y diferentes tipos de juntas (fig 4.a). El diagrama estructural correspondiente a un eje (fig 4.b) muestra los GE que lo forman y su orden de resolución. Un eje está formado por cinco GE. Las características de cada grupo (y sólidos que lo forman, entre llaves) se indican a continuación:
 - SG-I{2,3,4,5}: modelizado con 8 puntos y 9 vectores, cuenta con juntas cardan (2-4 y 2-5), esféricas (1-4, 1-5 y 2-3) y de revolución (1-3). Los dos GDL del sistema corresponden a los desplazamientos verticales de las dos ruedas del eje. Requiere la determinación de otros puntos de interés para la resolución del resto de grupos.
 - SG-II{6,8} y SG-III{7,9}: cada grupo se modeliza con 3 puntos, 5 vectores y 1 ángulo, y cuentan con juntas cardan (6-8 y 7-9), esféricas (1-8 y 1-9) y de revolución (2-6 y 2-7).
 - SG-IV:{10,11} y SG-V:{12,13}: cada grupo se modeliza con 2 puntos, 5 vectores y 1 distancia, y cuentan con juntas esféricas (1-11, 1-13), cardan (2-10, 2-12) y par prismático (10-11, 12-13).

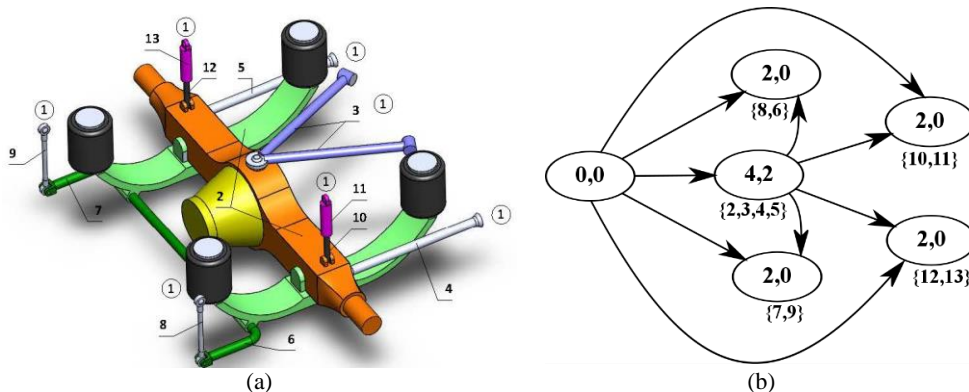


Figura 4: Sistema de suspensión de camión: (a) identificación de sólidos, (b) diagrama estructural que muestra los grupos del sistema y el orden de resolución.

Para evaluar las diferencias entre la formulación global y la de ecuaciones de grupo se realizan un total de siete análisis. Estos análisis se nombran utilizando la siguiente nomenclatura: FBL para el cuadrilátero escalable, TS para la suspensión de camión, G indica uso de formulación global, TPA para formulación topológica con generación automática de restricciones y jacobiano, TPS indica el uso de formulación topológica con aportación simbólica de restricciones y jacobiano, y una última referencia para el solver utilizado, MA27 desarrollado por HSL [15], o LAP para el uso de LAPACK en MKL [16].

El propósito de los análisis con formulación global: FBL-G_MA27 y TS-G_MA27 es servir de referencia a los que utilizan Ecuaciones de Grupo. En los análisis con formulación global, la sistemática consiste en llamar, en cada instante de tiempo, a las subrutinas necesarias para: A) Resolver el problema de posición (2), evaluando: A.1) las ecuaciones de restricción Φ de todo el modelo (ecuaciones de sólido rígido y de par cinemático) y A.2) matriz Jacobiana del sistema Φ_{φ} . B) Resolver el problema de velocidad (3), evaluando: B.1) La matriz Jacobiana Φ_h respecto a las coordenadas independientes y B.2) solución al sistema de ecuaciones lineales. C) Resolver el problema de aceleraciones (4) evaluando: C.1) el producto matriz por vector $\dot{\Phi}_{qG} \cdot \dot{q}_G$ y C.2) resolviendo el sistema de ecuaciones.

Por otro lado, los principales análisis topológicos a realizar son:

- Análisis FBL-TP: los GE que definen la estructura cinemática del cuadrilátero tienen un número de coordenadas q_G reducido, de modo que para este análisis se definen de forma simbólica el vector de restricciones Φ , la matriz Jacobiana Φ_{qG} , y el vector $\dot{\Phi}_{qG} \cdot \dot{q}_G$. Además, debido a su simplicidad, la inversa del Jacobiano Φ_{qG}^{-1} de estos GE también se definen de forma simbólica, por lo que la solución no requiere un solver específico para el análisis cinemático.
- Análisis TS-TPA: en el análisis cinemático del sistema de suspensión se utiliza primero un método en que las matrices y vectores necesarios para resolver cada GE se evalúan numéricamente, en cada instante, tal como lo hace la formulación global. En este sentido, la diferencia entre TS-G y TS-TPA es que el global resuelve el sistema completo de ecuaciones del MBS, mientras que el topológico resuelve cada GE en la secuencia de su estructura cinemática. Este análisis es importante al mostrar las ventajas de la utilización de la formulación basada en ecuaciones de grupo, incluso sin utilizar expresiones simbólicas. Para este análisis se utilizan dos solvers: para matrices dispersas MA27 y densas MKL.
- Análisis TS-TPS: de forma similar al análisis FBL-TP, en este caso se aportan las expresiones simbólicas de vectores y matrices utilizados en el análisis cinemático de cada GE, a excepción de la inversa de la matriz Jacobiana. Este análisis utiliza también los dos mismos solvers que en TS-TPA.

Todos los análisis se programan en Fortran90, compilado con MS Visual Studio en modo RelWithDebInfo, en un equipo que cuenta con un Intel Core i5-2400 CPU 3.10 GHz, 16 GB RAM, y SO Windows7 SP1 64bits. Las ejecuciones simulan un funcionamiento de mecanismo de 30 s. Todos los MBS simulados se han modelizado en coordenadas mixtas (naturales y relativas).

3. Resultados y discusión

Con objeto de comparar la eficiencia de las diferentes soluciones se analiza la posición, velocidad y aceleración de las variables de los MBS presentados. Los resultados obtenidos se presentan en dos grupos de datos: Tiempos CPU de cada sistema simulado y speed-ups obtenidos de la solución topológica frente a la global, para el caso de la suspensión del camión, al ser el sistema más complejo (caso más desfavorable).

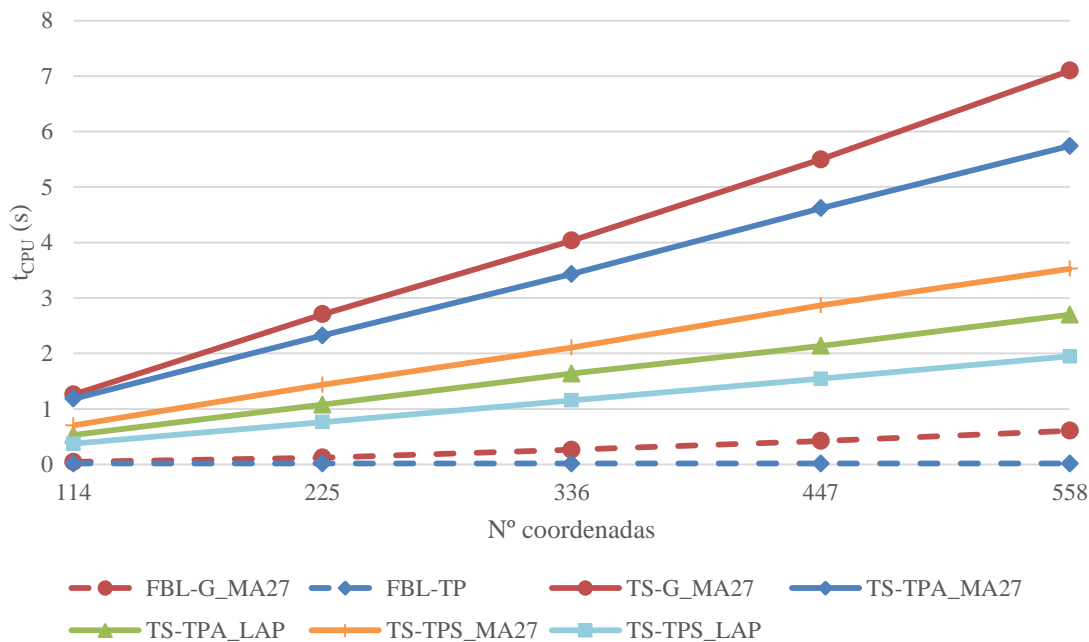
3.1. Análisis de tiempos de CPU

La tabla 1 muestra los resultados del tiempo de CPU en función del número de coordenadas que define el MBS. En todos los casos el tiempo sigue una tendencia lineal $O(n)$ según aumenta el número de coordenadas. En la figura 5, las líneas discontinuas muestran los resultados del cuadrilátero escalable (FBL): la solución global se presenta como FBL-G_MA27, y la topológica como FBL-TP. En esta última, el tiempo de CPU es muy próximo a cero incluso para una dimensión del sistema de 550 coordenadas (el número de coordenadas se debe aumentar hasta 1000 para empezar a mostrar tiempos por encima de 0,015s). La formulación global también muestra un consumo bajo de tiempo para un número elevado de coordenadas.

Tabla 1: Tiempos de ejecución (en s) de las soluciones simuladas en función del número de coordenadas, para los mecanismos del cuadrilátero escalable (FBL) y la suspensión de camión (TS).

Nº de coords.	FBL-G_MA27	FBL-TP	TS-G_MA27	TS-TPA_MA27	TS-TPA_LAP	TS-TPS_MA27	TS-TPS_LAP
114	0,045	<<0,015	1,258	1,185	0,530	0,702	0,374
225	0,123	<<0,015	2,707	2,324	1,076	1,435	0,764
336	0,264	<<0,015	4,035	3,432	1,638	2,106	1,154
447	0,421	<<0,015	5,499	4,618	2,135	2,870	1,544
558	0,607	<<0,015	7,100	5,741	2,699	3,526	1,949

Para el caso de la suspensión de camión (TS), la figura 5 representa cinco líneas continuas: análisis global (TS-G_MA27) y cuatro topológicas (TS-TPA_MA27, TS-TPA_LAP, TS-TPS_MA27, TS-TPS_LAP). Los resultados muestran cómo, cuando los vectores y matrices utilizados en el análisis cinemático se evalúan de forma automática (TS-TPA_MA27 y TS-TPA_LAP), el tiempo de CPU conseguido ofrece una mejora que aumenta conforme aumenta el número de coordenadas del sistema. Este resultado es mejorado aún más por el modo de resolución simbólico (TS-TPS_MA27 y TS-TPS_LAP) con un rendimiento considerablemente mejor que la formulación global. La mejora obtenida por ambos métodos topológicos (automático y simbólico), comparando solvers, se estudia a continuación con el análisis del speed-up obtenido.

**Figura 5:** Tiempo CPU (t_{CPU}) en segundos en función del número de coordenadas para el análisis cinemático de los dos casos de estudio: cuadrilátero escalable (FBL) y suspensión de camión (TS).

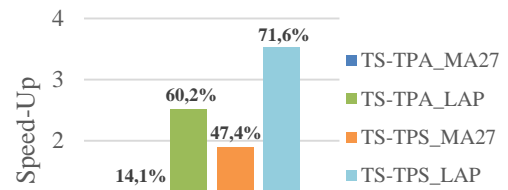
3.2. Análisis de speed-up

Para valorar el rango medio de mejora obtenido por la formulación topológica frente a la global, se ha obtenido el speed-up logrado en cada simulación ejecutada. El speed-up se obtiene como la relación entre el tiempo de referencia en formulación global dividido por el tiempo obtenido con la formulación topológica $S = \frac{t_{global}}{t_{topológico}}$.

También se obtiene el porcentaje de mejora de la formulación topológica por ecuaciones de grupo (tabla 2). Se observa cómo la mejora obtenida por el modo simbólico es notablemente superior al obtenido por el modo automático de obtención de matrices y vectores debido, sobre todo, a que el método simbólico, al aportar directamente las matrices y vectores necesarias para el análisis, no tiene que crearlas ni que operar con ellas. También se observa que la solución simbólica por grupos obtiene un mejor rendimiento con el solver MKL (TS-TPS_LAP, $S=3.5$) que con el solver para matrices dispersas (TS-TPS_MA27, $S=1.9$). Esto es debido a que, a pesar de que las matrices que definen los GE son de tamaño pequeño-medio, MKL está suficientemente optimizado como para sacar aún ventaja al MA27. Este resultado también se evidencia en el modo de generación automática de matrices y restricciones.

Tabla 2: Mejora de rendimiento obtenida por las cuatro soluciones para suspensión de camión: speed-up y valor porcentual

Nº de coords.	TS-TPA_MA27	TS-TPA_LAP	TS-TPS_MA27	TS-TPS_LAP
114	1,1 (5,8%)	2,4 (57,9%)	1,8 (44,2%)	3,4 (70,3%)
225	1,2 (14,8%)	2,5 (60,3%)	1,9 (47,0%)	3,5 (71,8%)
336	1,2 (14,9%)	2,5 (59,4%)	1,9 (47,8%)	3,5 (71,4%)
447	1,2 (16,0%)	2,6 (61,2%)	1,9 (47,8%)	3,6 (71,9%)
558	1,2 (19,1%)	2,6 (62,0%)	2,0 (50,3%)	3,6 (72,5%)
Media	1,2 (14,1%)	2,5 (60,2%)	1,9 (47,4%)	3,5 (71,6%)

**Figura 6:** Speed-Up medio logrado.

4. Conclusiones

La estructura cinemática de un MBS, que puede obtenerse de forma analítica o computacional, descompone un MBS en cadenas cinemáticas denominadas Grupos Estructurales (GE), en un orden específico, cuyo análisis cinemático puede obtenerse utilizando subrutinas específicas. En este trabajo se presenta una formulación topológica basada en ecuaciones de grupo, y se plantea en dos modos distintos (automático y simbólico) y cada uno de estos modos se resuelve con dos solvers distintos (MA27 y MKL). Para analizar la eficiencia computacional de esta formulación se utilizan dos MBS escalables con hasta 550 coordenadas: el cuadrilátero articulado, con un número de diadas variable, y la suspensión de camión de número de ejes variable.

La solución mediante formulación basada en ecuaciones de grupo se implementa en dos modos: Simbólico (TPS), en el que las matrices y vectores necesarios para el análisis de cada GE se define de antemano, y Automático (TPA), en el que los elementos de esas matrices y vectores se obtienen de forma automática atendiendo a la topología de cada GE. Además, la solución de esos dos métodos se aborda con dos solvers: MKL, específico para trabajo con matrices densas (LAP) y otro específico para matrices dispersas (MA27). La eficiencia de las soluciones basadas en ecuaciones de grupo se comparan con los resultados de una formulación global para el cuadrilátero (FBL-G_MA27) y para el sistema de suspensión (TS-G_MA27). Para el análisis de la eficiencia se miden los tiempos de ejecución de todos los cálculos realizados durante el análisis cinemático de los MBS. Los resultados obtenidos permiten destacar una serie de ventajas obtenidas por la formulación topológica de ecuaciones de grupo:

- **Flexibilidad:** la aproximación topológica permite el uso de cualquier tipo de coordenadas (punto de referencia, naturales, relativas, mixtas) para modelizar un grupo estructural y resolver su cinemática.
- **Modularidad:** el método topológico presentado es una aproximación modular. La solución de cada GE puede programarse, optimizarse y compilarse en una subrutina independiente que puede incluirse en una extensa librería de GE. Esta modularidad ofrece varias ventajas: facilidad de modelización y resolución de cualquier MBS, y análisis rápido y efectivo.
- **Generalidad frente a eficiencia:** dependiendo del número de coordenadas para modelizar cada GE, se pueden emplear diferentes métodos para resolver su cinemática. De este modo, en grupos simples con bajo número de coordenadas pueden emplearse métodos simbólicos aportando las expresiones de matrices y vectores necesarios (incluso la inversa de la matriz Jacobiana del sistema, FBL-TP_MA27), consiguiendo una máxima eficiencia. Por otro lado, el modo automático evalúa los vectores y matrices que intervienen en el problema cinemático (TS-TPA_MA27 y TS-TPA_LAP) logrando un mejor rendimiento que la solución global, pero por debajo de las soluciones topológicas simbólicas.
- **Método disperso frente a denso:** como el análisis cinemático de cada GE se ejecutan de forma independiente, la eficiencia de cualquier subrutina de GE puede mejorarse seleccionando el solver más adecuado en función de la estructura del grupo. De este modo, en caso de grupos de dimensiones reducidas, los solvers densos como MKL son muy eficientes, consiguiendo los mejores resultados ($S=3,5$ en MKL frente a $S=2,5$ para MA27) en el caso de la suspensión. Para MBS formados por grupos con dimensiones mayores (superiores a 60) ya puede ser interesante combinar con solvers dispersos como MA27. En estudios posteriores a los abarcados por este trabajo se estudia la influencia de la dimensión de los grupos estructurales en el tiempo de resolución del MBS [17] y posibles mejoras con la implementación de técnicas de paralelización multihilo.

5. Referencias

- [1] S. Kim and E. J. Haug, "A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part II: Closed loop systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 74, pp. 251–269, 1989.
- [2] J. Samin and P. Fiset, *Symbolic modeling of multibody systems*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [3] A. Kecskeméthy, T. Krupp, and M. Hiller, "Symbolic processing of multiloop mechanism dynamics using closed-form kinematics solution," *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, No. 1, pp. 23–45, 1997.
- [4] A. A. Shabana, *Dynamics of multibody systems*, 2nd ed. Cambridge Univ Press, 1998.
- [5] M. Gerardin and A. Cardona, *Flexible multibody dynamics: A finite element approach*. John Wiley & Sons, 2001.
- [6] E. J. Haug, *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems*. Allyn and Bacon, Boston, MA, 1989.
- [7] P. E. Nikravesh, *Computer aided analysis of mechanical systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NY, 1988.
- [8] J. G. Jalon, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*. Springer-Verlag, NY, 1993.
- [9] M. Leger and J. McPhee, "Selection of modeling coordinates for forward dynamics multibody simulations," *Multibody System Dynamics*, Vol. 18, No. 18, pp. 277–297, 2007.
- [10] J. Cuadrado, D. Dopico, M. Gonzalez, and M. A. Naya, "A combined penalty and recursive real-time formulation for multibody dynamics," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, No. 4, pp. 602–608, 2004.
- [11] M. Z. Kolovsky, A. N. Evgrafov, Y. A. Semenov, and A. V. Slousch, *Advanced theory of mechanism and machines*. Springer, 2000.
- [12] A. Sljoka, O. Shai, and W. Whiteley, "Checking mobility and decompositions of linkages via pebble game algorithm," in *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Washington, DC, USA, 2011, pp. 1–10.
- [13] M. Saura, A. Celdran, D. Dopico, and J. Cuadrado, "Computational structural analysis of planar multibody systems with lower and higher kinematic pairs," in *Proceedings of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, Stuttgart, Germany, 2012.
- [14] A.I. Celdrán, M. Saura, D. Dopico. Análisis computacional de la estructura cinemática de sistemas multicuerpo espaciales. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Elche, España, (2016).
- [15] HSL, a collection of fortran codes for large-scale scientific computation, <http://www.hsl.rl.ac.uk/> (2015).
- [16] Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL), <https://software.intel.com/en-us/mkl-reference-manual-for-fortran> (2015)
- [17] P. Segado, J.C. Cano, J. Cuenca, D. Giménez, M. Saura, P. Martínez. Eficiencia de la paralelización multihilo en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo basado en Ecuaciones de Grupo. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Elche, España, (2016).