

# Formulaciones dinámicas en coordenadas naturales para la aproximación basada en Ecuaciones de Grupo

M. Saura Sánchez<sup>1</sup>, P. Segado Cabezos<sup>1</sup>, D. Dopico Dopico<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena. msaura.sanchez@upct.es

<sup>2</sup>Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Cartagena. pablo.segado@upct.es.es

<sup>3</sup>Laboratorio de Ingeniería Mecánica. Universidad de A Coruña. ddopico@udc.es

---

*El análisis cinemático y dinámico de sistemas multicuerpo se ha convertido en una herramienta cada vez más extendida para el análisis, diseño, simulación y control de sistemas mecánicos. Algunos de los problemas a los que la dinámica computacional puede dar respuesta demandan un coste computacional cada vez más elevado: aplicaciones de tipo Hardware o Human In the Loop, exigen análisis en tiempo real; problemas de diseño óptimo, de análisis de sistemas con sólidos flexibles o simulaciones con elevada carga de representación gráfica, son solo algunos ejemplos. Lanzar estas aplicaciones en centros de cálculo de altas prestaciones no es la solución más apropiada; por ello, interesa el estudio de formulaciones dinámicas y métodos computacionales cada vez más eficientes. El objetivo de este trabajo es doble: presentar un método de análisis dinámico directo de sistemas multicuerpo que explota la estructura cinemática del mecanismo para formar las ecuaciones del movimiento, y comprobar si este método es más eficiente que un método global trabajando, ambos, con el mismo tipo de coordenadas y la misma formulación dinámica. En el método propuesto se determina la estructura cinemática del sistema a estudio aplicando la ley de formación de Grupos Estructurales (GE); como resultado se obtiene la división del sistema mecánico en un conjunto ordenado de cadenas desmodrómicas (GE) que se analizan en cada instante de tiempo, en el orden establecido por su estructura cinemática, para obtener su contribución a los vectores y matrices que forman las ecuaciones del movimiento de todo el sistema. El método propuesto se ha implementado para la modelización de sistemas 3D en coordenadas naturales y ofrece solución al análisis cinemático y dinámico directo mediante las formulaciones dinámicas: Penalizadores y Matriz de Complemento Ortogonal. Se compara la eficiencia computacional de este método con la de un método global aplicado al mecanismo manivela- biela-corredera espacial escalable. Los resultados obtenidos muestran una precisión similar para ambos métodos y una reducción del esfuerzo computacional del orden del 80% en el análisis cinemático y un porcentaje de reducción que varía entre el 27% y el 80% en problemas de 19 y 4009 ecuaciones de restricción respectivamente.*

---

## 1. Introducción

El análisis dinámico computacional de sistemas multicuerpo está ampliamente extendido como herramienta utilizada en el diseño, simulación y control de sistemas mecánicos. A partir de un modelo matemático de los elementos que componen el mecanismo, de las fuerzas que actúan sobre ellos y de las limitaciones al movimiento impuestas por sus uniones, la dinámica computacional permite predecir, simular y controlar su comportamiento a lo largo del tiempo, así como diseñar las uniones y los sólidos del sistema para que sean capaces de resistir los esfuerzos a los que se verán sometidos durante su ciclo de trabajo.

El amplio abanico de problemas a los que la dinámica computacional puede, hoy en día, dar solución, exige el desarrollo de métodos computacionales eficientes y de formulaciones cinemáticas y dinámicas que sean generales, eficientes, robustas y precisas. Las formulaciones llamadas globales no explotan la topología del sistema mecánico; por ello, sea cual sea el sistema a estudiar, su modelización y análisis cinemático o dinámico se puede llevar a cabo de forma muy sistemática. La ventaja que supone la modelización automática del sistema en las formulaciones globales se ha asociado, tradicionalmente, a una pérdida de eficiencia debido a la necesidad de emplear un elevado número de coordenadas en la definición del modelo y a que el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento se extiende a todo el conjunto de coordenadas. Las formulaciones topológicas, por el contrario, sí explotan la topología del mecanismo, por lo que permiten generar un modelo matemático con un menor número de coordenadas; además, el sistema de ecuaciones del movimiento se extiende solo a un número de coordenadas igual en número a los grados de libertad (GDL) del mecanismo; esto las hace más eficientes que

las globales, pero menos generales ya que la topología considerada inicialmente puede cambiar a lo largo del tiempo. El método basado en Ecuaciones de Grupo que se propone en este trabajo utiliza la teoría del análisis estructural para descomponer con métodos grafo-analíticos [1] o computacionales [2] un sistema multicuerpo dado en un conjunto ordenado de subsistemas de menor tamaño cuya solución ha resultado ser más eficaz que abordar directamente la solución del sistema completo [3-5]. La mejor eficiencia de la formulación basada en Ecuaciones de Grupo se ha demostrado en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo, siendo el objetivo fundamental de este trabajo el determinar si estas mejoras se mantienen en la solución al problema dinámico directo.

Para ello se implementa, en este trabajo, la dinámica computacional de sistemas multicuerpo basada en Ecuaciones de Grupo a partir de distintas formulaciones dinámicas conocidas [6]: Penalizadores y Matriz R y se aplican al mecanismo manivela-biela-corredora 3D escalable con la finalidad de evaluar su eficiencia y precisión, comparándolas entre sí y con una solución global; esto es, sin descomposición ordenada del sistema mecánico en subsistemas. Para centrar el foco del problema en la solución basada en ecuaciones de grupo y en las formulaciones dinámicas implementadas, los análisis se llevarán a cabo considerando exclusivamente la modelización de los sistemas multicuerpo en coordenadas naturales.

## 2. Formulaciones dinámicas: aproximación global

El análisis cinemático y dinámico computacional de un sistema multicuerpo requiere de la selección de un conjunto de coordenadas  $\mathbf{q}$  que permitirán identificar, en cualquier instante de tiempo, la posición y orientación de todos los sólidos del sistema. Si el número de coordenadas  $n$  empleado para definir el sistema es mayor que su número de grados de libertad  $g$ , se hace necesario introducir un vector de ecuaciones de restricción  $\Phi$ , de dimensión  $m = n - g$  que relacionen las coordenadas del modelo entre sí (1).

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

### 2.1. Análisis cinemático

Una vez seleccionado el conjunto de coordenadas y definido el vector de ecuaciones de restricción mediante (1) se puede llevar a cabo el análisis cinemático del sistema, el cual consiste en resolver los problemas de posición, velocidad y aceleración de las coordenadas dependientes a partir de valores conocidos para la posición, velocidad y aceleración de las coordenadas independientes,  $\mathbf{z}$ , subconjunto del vector  $\mathbf{q}$  que representa los movimientos de los grados de libertad del sistema. El problema de posición se suele abordar mediante un esquema iterativo basado en el método de Newton-Raphson (2) según el cual, partiendo de los valores conocidos de las coordenadas independientes  $\mathbf{z}$  y de unos valores estimados para las coordenadas dependientes, se obtienen, en cada iteración, nuevas aproximaciones al valor exacto de las coordenadas dependientes. En (2) la matriz  $\Phi_{\mathbf{q}}$  representa la matriz Jacobiana de las ecuaciones de restricción.

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_i)(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i) = -\Phi(\mathbf{q}_i) \quad (2)$$

Resuelto el problema de posición, se pueden abordar los de velocidad (3) y aceleración (4), mediante la resolución de los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales que se obtienen al derivar respecto al tiempo una y dos veces las ecuaciones de restricción.

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \rightarrow \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_t \quad (3)$$

$$\ddot{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \rightarrow \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = -[\dot{\Phi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \ddot{\Phi}_t] \quad (4)$$

### 2.2. Análisis dinámico

El análisis dinámico permite relacionar el movimiento de un sistema con el conjunto de fuerzas que actúan sobre él. En un sistema mecánico definido en coordenadas dependientes, las ecuaciones dinámicas que permiten determinar la respuesta del sistema (5) se deben resolver junto con sus correspondientes ecuaciones de restricción (1), dando lugar a un sistema de  $n + m$  ecuaciones diferenciales-algebraicas (DAE's).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

Siendo  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz de masas del sistema,  $\mathbf{Q}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  el vector de fuerzas generalizadas y  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  un vector de multiplicadores de Lagrange asociado a las ecuaciones de restricción que definen el modelo. Existen diversas formulaciones dinámicas que permiten expresar el sistema de ecuaciones (5) como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), lo que permite el uso de métodos numéricos consolidados y muy

rigurosamente descritos en [6]. En este trabajo se han implementado tres formulaciones distintas para evaluar la eficacia de la aproximación topológica basada en ecuaciones de grupo: Penalizadores y matriz  $\mathbf{R}$ , cuyos fundamentos se introducen aquí solo para una mejor comprensión de cómo implementar la solución basada en ecuaciones de grupo.

El método de **penalizadores** se basa en estimar el valor de los multiplicadores de Lagrange según (6), de manera que ya no forman parte del vector de incógnitas del sistema (5). En (6), el parámetro  $\alpha$  actúa como penalizador sobre la violación de las restricciones de posición, velocidad y aceleración:  $\Phi$ ,  $\dot{\Phi}$ ,  $\ddot{\Phi}$  y se le suele asignar el valor  $10^6$  ó  $10^7$  y los parámetros  $\xi = 1, \omega = 10$  se eligen para que, en caso de producirse, la violación de las restricciones sea armónica y amortiguada.

$$\lambda = \alpha(\ddot{\Phi} + 2\xi\omega\dot{\Phi} + \omega^2\Phi) \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (6) y ésta última en (5) las ecuaciones dinámicas que definen el comportamiento del sistema se reducen al sistema lineal de ecuaciones ODE (7) del que se puede calcular el vector de aceleraciones e integrarlo para determinar el de velocidades y posiciones de todo el sistema en función del tiempo.

$$(\mathbf{M} + \alpha\Phi_q^T\Phi_q)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \alpha\Phi_q^T(\dot{\Phi}_q\dot{\mathbf{q}} + 2\xi\omega\dot{\Phi} + \omega^2\Phi) \quad (7)$$

La formulación basada en la matriz de complemento ortogonal, conocido como **matriz  $\mathbf{R}$** , trata de expresar el sistema (5) en términos de un conjunto de coordenadas independientes  $\mathbf{z}$  reduciendo, con ello, la dimensión del sistema a resolver a un ODE de tamaño ' $g$ '. Para ello se expresan las velocidades de las coordenadas dependientes como combinación lineal de las velocidades que se han seleccionado como independientes (8); la derivada temporal de estas relaciones permite, a su vez, expresar las aceleraciones de las coordenadas del modelo en función de las aceleraciones y de las velocidades de las independientes (9).

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \quad (8)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}} \quad (9)$$

Sustituyendo las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$  en (5), premultiplicando ambos términos por  $\Phi_q^T$  y considerando que  $\Phi_q\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , el sistema de ecuaciones que define el comportamiento dinámico del sistema se reduce a (10).

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}) \quad (10)$$

Esta formulación exige el cálculo de la matriz  $\mathbf{R}$  y del vector resultante del producto  $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ ; para ello resulta imprescindible resolver, en cada instante de tiempo, los problemas de posición y velocidad, lo que garantiza el cumplimiento de las correspondientes ecuaciones de restricción y, con ello, un resultado más exacto y unos sistemas ODE mejor condicionados y más fáciles de integrar numéricamente. Dado que la matriz  $\mathbf{R}$  permite definir las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  como combinación lineal de las independientes  $\dot{\mathbf{z}}$ , se pueden determinar, en cada instante de tiempo, los valores de los elementos de cada una de sus columnas  $\mathbf{R}(:, i)$ ,  $i = 1: g$ , resolviendo  $g$  problemas de velocidades (8) asignando:  $\dot{z}_i^* = 1$ ;  $\dot{z}_j^* = 0, i \neq j$ .

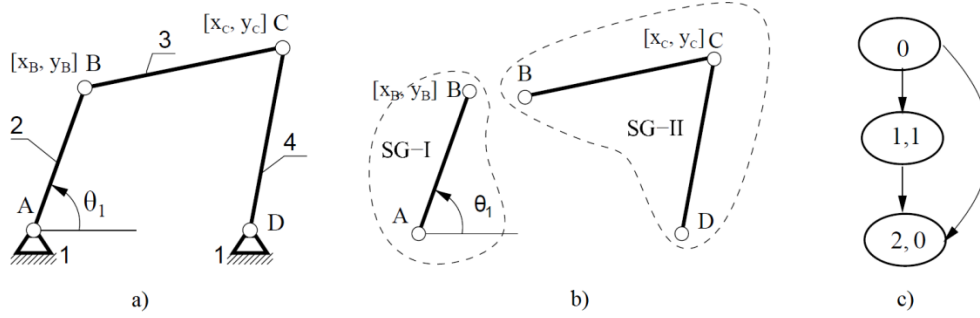
Por su parte, el producto  $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$  se puede resolver determinando las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}^*$  del sistema, en cada instante de tiempo, resolviendo el problema de aceleraciones (9) una sola vez, considerando nulas las aceleraciones independientes ( $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ ).

### 3. Formulaciones dinámicas: aproximación basada en Ecuaciones de grupo

La aproximación topológica basada en ecuaciones de grupo ha mostrado una gran eficiencia en el análisis cinemático computacional de sistemas multicuerpo. En [3, 5] se describe con detalle el análisis cinemático basado en ecuaciones de grupo y las reducciones de tiempo conseguidas frente a formulaciones globales y en [4] se describen las ventajas obtenidas con esta aproximación al emplear técnicas de computación paralela.

#### 3.1. Análisis estructural

Esta aproximación cinemática explota la topología del sistema multicuerpo a través de su estructura cinemática la cual, obtenida por métodos grafo-analíticos o computacionales [1,2] determina qué cadenas cinemáticas (Grupos Estructurales), cinemáticamente determinadas forman el sistema multicuerpo y en qué orden se debe abordar su análisis. Un claro ejemplo es el mecanismo cuadrilátero articulado de la Figura 1, formado por dos grupos estructurales: SG-I (manivela) y SG-II (biela-balancín). Si el grado de libertad (GDL) conocido es el giro de la manivela  $\theta_1$ , se puede resolver su cinemática y determinar la posición, velocidad y aceleración de la articulación A; seguidamente se puede resolver la cinemática del GE biela-balancín, lo que permitirá obtener la posición, velocidad y aceleración de la articulación C.



**Figura 1:** El cuadrilátero articulado (a) se puede descomponer en dos grupos estructurales (GE) (b): manivela SG-I y diada SG-II, de forma que el análisis cinemático del mecanismo completo se puede abordar resolviendo los GE que forman su estructura cinemática (c): primero la manivela, con un sólido y un grado de libertad (1,1) y posteriormente la diada formada por dos sólidos con movilidad nula (2,0).

### 3.2. Análisis cinemático

Una vez obtenida la estructura cinemática del sistema mecánico, el análisis se lleva a cabo resolviendo, en el orden indicado por ésta, la cinemática de los GE que lo componen. En [3] se presentan distintas formulaciones cinemáticas para resolver un GE dado. Resumidamente, el GE se modeliza mediante un vector de coordenadas  $\mathbf{q}_G$  que se puede partir en dos subconjuntos de coordenadas: dependientes  $\boldsymbol{\varphi}$  e independientes  $\mathbf{h}$ . Estas coordenadas se relacionan entre sí mediante las correspondientes ecuaciones de restricción (ecuaciones de grupo) similares a (1). Las coordenadas independientes corresponden a GDL del sistema o a coordenadas calculadas de GE que, por su posición en la estructura cinemática, han sido ya resueltos. El análisis de posición sigue el esquema de Newton-Raphson mostrado en (2), el de velocidades según (3) y el de aceleraciones según (4), extendidos solo a las coordenadas de grupo. Conviene destacar que, en esta aproximación, el reducido tamaño de los GE permite generar las matrices y los vectores necesarios para en análisis ( $\Phi$ ,  $\Phi_{\varphi}$ ,  $\Phi_{\varphi}^T \Phi_{\varphi}$ , etc.) mediante programas de cálculo simbólico, a los que se puede acceder llamando a la subrutina correspondiente.

Otra opción para resolver la cinemática de un GE es utilizar matriz  $\mathbf{R}$ . Para ello se obtienen las matrices Jacobianas  $\Phi_{\varphi}$ ,  $\Phi_{\mathbf{h}}$  de las ecuaciones de grupo respecto a los vectores de coordenadas dependientes e independientes y se determina  $\mathbf{R}_{\varphi\mathbf{h}}$  mediante (11 izda). Dado que las  $\mathbf{R}_{\mathbf{h}z}$  se han obtenido en la solución de GE anteriores, se pueden calcular los elementos de  $\mathbf{R}_{\varphi z}$  mediante (11 dcha).

$$\Phi_{\varphi} \mathbf{R}_{\varphi\mathbf{h}} = \Phi_{\mathbf{h}}; \quad \mathbf{R}_{\varphi z} = \mathbf{R}_{\varphi\mathbf{h}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{h}z} \quad (11)$$

Las velocidades de las coordenadas dependientes se pueden obtener mediante (9). Para el cálculo de las aceleraciones según (4) se puede utilizar el método de partición de coordenadas (12).

$$\Phi_{\varphi} \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = -[\Phi_{\mathbf{h}} \cdot \ddot{\mathbf{h}} + \dot{\Phi}_{\mathbf{h}} \cdot \dot{\mathbf{h}} + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}_G} \cdot \dot{\mathbf{q}}_G] \quad (12)$$

### 3.3. Análisis dinámico

Al igual que en el método global, el análisis dinámico se puede abordar mediante diferentes formulaciones dinámicas. En primer lugar, se asume que la modelización del sistema se lleva a cabo en coordenadas naturales con suficiente número de entidades como para considerar que la matriz de masas del sistema  $\mathbf{M}$  en (5) es constante y se puede obtener mediante el ensamblaje de las contribuciones que cada uno de los sólidos de cada GE hace a la misma. Su ensamblaje, así como el del vector de fuerzas generalizadas  $\mathbf{Q}$  constantes se realiza en una etapa inicial, previa a la del análisis dinámico.

En la formulación basada en **penalizadores** las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{q}}$  a integrar en cada instante de tiempo se obtienen llamando a subrutinas específicas que analizan los GE en el orden indicado en su estructura cinemática; para cada GE se calculan:  $\Phi$ ,  $\Phi_{\varphi}$ ,  $\dot{\Phi}$ ,  $\dot{\Phi}_{\mathbf{q}_G} \dot{\mathbf{q}}_G$ ,  $\Phi_{\mathbf{q}_G}^T \Phi_{\mathbf{q}_G}$  y con ellas se generan  $\bar{\mathbf{M}}$  y  $\bar{\mathbf{Q}}$  (13) de ámbito global. Las contribuciones de los sólidos de cada GE permiten actualizar  $\bar{\mathbf{M}}$  y  $\bar{\mathbf{Q}}$  de forma que cuando se hayan resuelto todos los GE que componen el sistema se podrá resolver (13) para obtener e integrar las aceleraciones.

$$(\mathbf{M} + \alpha \Phi_{\mathbf{q}_G}^T \Phi_{\mathbf{q}_G}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \alpha \Phi_{\mathbf{q}_G}^T (\dot{\Phi}_{\mathbf{q}_G} \dot{\mathbf{q}} + 2\xi \omega \dot{\Phi} + \omega^2 \Phi) \rightarrow \bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (13)$$

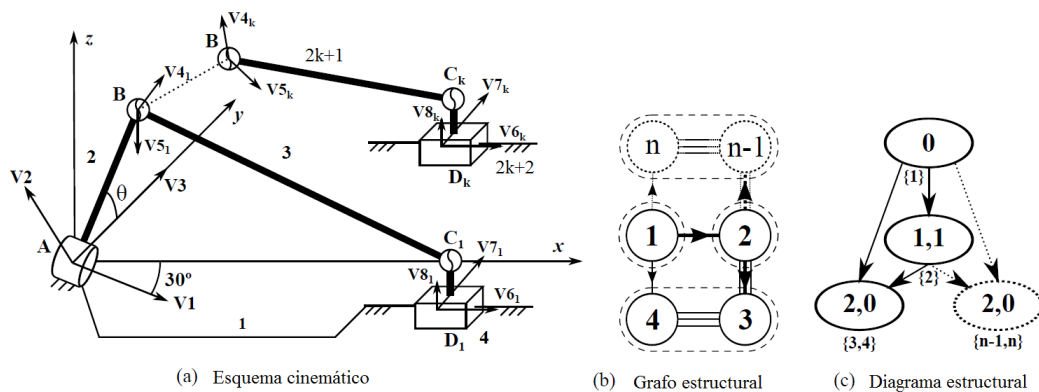
En la formulación matriz  $\mathbf{R}$  las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{z}}$  a integrar en cada instante de tiempo también se obtienen fácilmente llamando a subrutinas específicas que resuelven los distintos GE, desde las que se actualizan  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{z}$  considerados de ámbito global; analizados todos los GE de la estructura cinemática se resuelve el sistema (10) y

las aceleraciones se integran para obtener velocidades y posiciones. Dado que es preciso resolver el problema de posición y velocidad en cada instante, la matriz  $\mathbf{R}$  se obtiene según (11). El vector  $\mathbf{Q}$  se evalúa sumando al de términos constantes las fuerzas variables del modelo, que serán dependientes de posiciones y velocidades conocidas para cada instante de tiempo. Por último, el vector  $\mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}$  se corresponde con el valor de las aceleraciones del sistema cuando se considera  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ . De modo que es suficiente con calcular y almacenar, en la llamada a cada GE, el valor de las aceleraciones de las coordenadas de grupo  $\dot{\mathbf{q}}_G^*(\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0})$  mediante el uso de (12), lo que solo supone un análisis de aceleración adicional para cada GE.

#### 4. Material y métodos

Para estudiar la eficiencia del método basado en ecuaciones de grupo se compara su precisión y tiempo de cálculo respecto al método global en el análisis cinemático y dinámico directo del mecanismo manivela-biela-corredera espacial mostrado en la figura 2.

##### 4.1. Manivela biela corredera 3D



**Figura 2:** Esquema cinemático, grafo estructural y diagrama estructural del sistema manivela-biela-corredera espacial escalable sometido a estudio cinemático y dinámico directo.

Este mecanismo consiste en un bastidor {1}, el cuerpo {2} es una manivela que rota respecto al bastidor en una dirección inclinada ( $\vec{v}_1$  forma respecto al eje x del sistema global un ángulo fijo  $\beta = 30^\circ$ ) y un número creciente 'k' de diadas (cadena cinemática de dos cuerpos y movilidad nula) formadas por otros dos sólidos: biela {2k+1}, unidas a la manivela mediante junta esférica B y corredera {2k+2}, unidas a sus respectivas bielas mediante junta esférica  $C_k$  y trasladándose respecto al bastidor en una dirección fija (por simplicidad se ha considerado como tal el eje x del sistema global). La longitud de la manivela es 2 m y la de todas las bielas es 6 m. El sistema tiene movilidad  $g = 1$  cuando se fija la rotación de cada biela respecto a su propio eje longitudinal. En cuanto a su estructura cinemática, el diagrama estructural en la figura (2.c) indica que primero debe resolverse la manivela y posteriormente las distintas diadas sin importar el orden, ya que existe independencia cinemática entre ellas. Las masas de los sólidos son: manivela (1 kg), biela (3 kg) y corredera (1kg). El cdg de los sólidos coincide con su centro geométrico y sus tensores de inercia  $[I_x, I_y, I_z, -P_{xy}, -P_{xz}, -P_{yz}]$  respecto al centro de gravedad, en ejes locales, son: manivela (0.05,0.0098,0.008,0,0,0), biela (0.002,0.0012,0.0234,0,0,0) y corredera (0.002,0.0012,0.0234,0,0,0).

##### 4.2. Parámetros del análisis

Los dos métodos: global y topológico utilizan coordenadas naturales para modelizar el sistema. Para el análisis cinemático se asigna una velocidad constante  $\dot{\theta} = 24 \text{ rad/s}$  a la manivela que parte de una orientación inicial  $\theta = 0 \text{ rad}$  y realiza  $n = 2000$  vueltas, resolviéndose el problema de posición, velocidad y aceleración cada  $\Delta\theta = 30^\circ$ , de modo que se realizan 24000 análisis. El número de ecuaciones de restricción que definen el modelo es  $nEq = 9 + 10 \cdot k$ , el de coordenadas  $DIM = 7 + 9 \cdot k$  y el número de diadas consideradas en el análisis es:  $k = [1, 9, 18, 36, 72, 144, 288, 400]$ .

En la solución del problema dinámico directo se emplean las formulaciones: penalizadores y matriz R. Ambas formulaciones emplean un integrador implícito basado en regla trapezoidal con tamaño de paso fijo:  $dt = 0.005$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t = 120 \text{ s}$ , lo que da un total de 24.000 cálculos (los mismos que en el análisis cinemático). La tolerancia para el problema de posición es:  $tolNR = 1E - 10$  y para el bucle corrector del integrador:  $tolIntegr = 1E - 5$ . Para la formulación basada en penalizadores se emplea un penalizador:  $\alpha = 1e7$  si bien, también se lanza un análisis para  $k = 10$ ;  $dt = 0.01$ ;  $\alpha = 1e6$ .

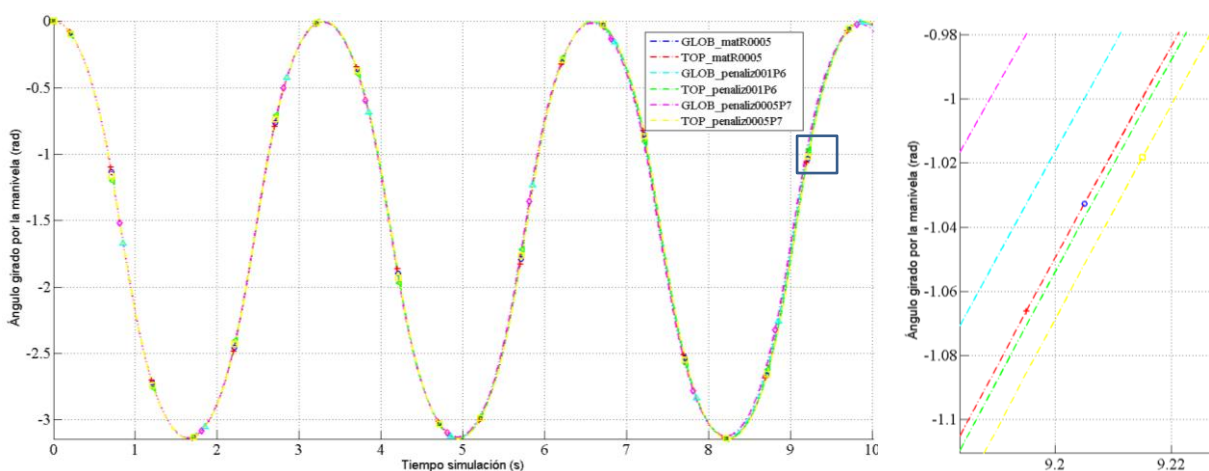
El método topológico utiliza una combinación de librerías de álgebra lineal: solver MKL para matrices densas en la solución de los distintos GE y solver MA28 para matrices dispersas no simétricas en la resolución del sistema de ecuaciones (13). El global utiliza exclusivamente el solver MA28. La librería MKL (Math Kernel Library) es un LAPACK (Linear Algebra PACKage) optimizado [7] y las subrutinas MA28 (*Harwell Subroutine Library*) han sido desarrolladas por Numerical Analysis Group at the Rutherford Appleton Laboratory [8]).

En cada análisis se define el número de diadas a considerar, el tipo de problema (cinemático / dinámico) la formulación (matrizR / Lagrange Aumentado) el tamaño de paso ( $dt$ ) y el valor del penalizador ( $\alpha$ ). Se realizan análisis previos con 10, 18 y 36 diadas para comprobar que no hay errores en la generación y resolución de los modelos. En estas comprobaciones se almacena en fichero el valor de la variable tiempo y de un resultado de interés (en cinemática, el desplazamiento, velocidad y aceleración de una de las correderas y en dinámica el giro de la manivela y el número de iteraciones en el bucle corrector). Hechas las comprobaciones, se lanzan tres análisis para cada escenario en los que no se almacena ni se muestra ningún parámetro por pantalla, más que el tiempo total de CPU, cuyo valor se anota en hoja de cálculo para obtener su media aritmética y utilizarla a efectos comparativos de los dos métodos. El tiempo CPU se registra solo para las opciones con  $dt = 0.005$  s.

Las soluciones global y topológica se han implementado en el lenguaje de programación Fortran 90, compilados con MS Visual Studio en el modo Release y ejecutados en un PC Intel Core i5-2400 CPU 3.10 GHz, RAM 16 GB, bajo Windows7 SP1 64 bits. El tiempo de cálculo CPU se obtiene mediante la función CPU\_TIME de fortran y se limita a los cálculos que se ejecutan durante el bucle de tiempos, quedando fuera tareas previas como la propia generación del modelo.

## 5. Resultados y discusión

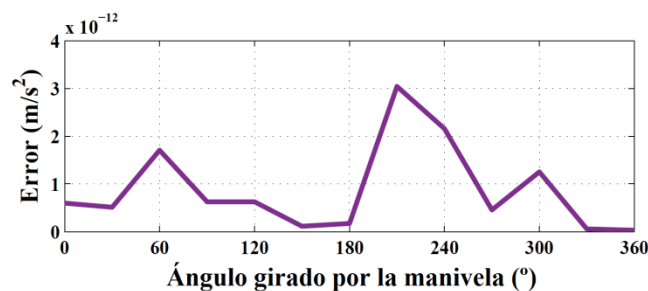
La figura 3 muestra, a modo de ejemplo, los resultados obtenidos en uno de los ensayos de comprobación (10 diadas) para ambos métodos y con las dos formulaciones consideradas. En la leyenda: GLOB identifica el método global, TOP el topológico, matR y penaliz la formulación dinámica, el valor 0005 ó 001 identifica el tamaño del paso de integración y el sufijo P6 ó P7 identifica el valor del penalizador ( $1E6$  ó  $1E7$ ). Se representa el ángulo girado por la manivela en función del tiempo y se observa cómo se obtienen resultados muy similares para los seis análisis. La figura 3 (derecha) muestra la ampliación de la zona marcada con recuadro en azul, entorno a los 9 segundos, en la figura de la izquierda. En este detalle se puede comprobar que los resultados obtenidos para GLOB\_matR0005 y TOP\_matR0005 son idénticos. Los resultados para el método global con penalizador (GLOB\_penaliz) dan disipación de energía, como cabía esperar, respecto a matrizR; ligeramente mayor con la opción 0005P7 que con 001P6. Por otro lado, el método topológico con penalizador (TOP\_penaliz) da resultados muy próximos a matrizR para la opción 001P6 y algo más alejados para la opción 0005P7. Este último resultado aconseja una revisión más profunda de los resultados obtenidos mediante esta formulación para descartar errores de cálculo o de programación, así como para analizar la posibilidad de que el propio método de resolución basado en ecuaciones de grupo sea el que reduce el efecto de la disipación de energía asociado a la formulación dinámica mediante penalizadores.



**Figura 3:** Izda) Ángulo girado por la manivela (rad) en función del tiempo de simulación para el mecanismo de manivela-biela-corredera 3D. Resultados para 10 diadas, formulaciones global (GLOB) y topológica (TOP) con matrizR y penalizadores. Dcha) detalle de las variaciones en resultados cambiando el parámetro de penalización.

La tabla 1 muestra los tiempos CPU obtenidos para el análisis cinemático (KIN) y dinámico (DIN) con los métodos y parámetros descritos en el apartado de material y métodos. Se puede comprobar que la evolución del tiempo CPU es perfectamente lineal para todos los análisis, excepto para el dinámico con método global y formulación penalizadores (GLOB\_DIN Penalty). El crecimiento exponencial en el tiempo CPU registrado para esta solución se podría explicar si la dependencia entre el número de no ceros de la matriz del sistema sparse no es proporcional a la dimensión del problema, efecto al que es más sensible el método global que el topológico.

Para el análisis cinemático la solución topológica ofrece reducciones de tiempo que aumentan conforme lo hace el número de diadas, variando entre el 11.01% para  $k = 1$  y el 60.5% para  $k = 400$ . En este tipo de análisis, con el mismo valor de tolerancia considerada en la solución del sistema no lineal de ecuaciones del problema de posiciones ( $1.E-10$ ) se deben obtener, partiendo de la mismos valores iniciales estimados para las variables que definen el problema, exactamente el mismo resultado sobre las variables cinemáticas analizadas. Este resultado se observa en la figura 4 donde, a modo de ejemplo se muestra que la diferencia en el valor de aceleración lineal obtenida para la corredera del mecanismo, analizado con el método global y el topológico es del orden de  $10^{-12}$ . Sin embargo, la misma tolerancia sobre el error en la solución del problema de posición no implica el mismo número de iteraciones en el método global que en el topológico; de hecho se ha observado que si se define una velocidad de la manivela cada vez más elevada en el problema cinemático, lo que provoca incrementos mayores en su orientación absoluta, se requiere un mayor número de iteraciones en el método global que en el topológico.



**Figura 4:** Error en la aceleración lineal de la corredera en función del giro de la manivela obtenido al comparar soluciones global y topológica (observe escala:  $1 \cdot 10^{-12}$ ).

Comparando tiempos para el análisis cinemático y el dinámico directo mediante matriz R, con el mismo número de análisis en ambos casos (24.000) se observa que ambos métodos: global y topológico obtienen menores tiempos en cinemática que en dinámica. Este resultado era el que cabía esperar ya que en la formulación matriz R, además de resolver el análisis de posición y velocidad, así como el de aceleración para obtener el vector  $\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}}$ , también se deben obtener las matrices y vectores  $\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^T(\mathbf{Q} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{z}})$  y resolver el sistema ODE. En ambos casos (global y topológico) el aumento de tiempo del análisis dinámico sobre el cinemático ronda el 27%.

En el caso del análisis dinámico mediante penalizadores, las reducciones en tiempo CPU que ofrece el método topológico varían desde un 27% en la solución con una sola diada, hasta un 84.6% para 400 diadas. Para descartar que la diferencia de tiempos se deba a que ambos métodos realizan un número de iteraciones distinto en el bucle iterativo 'corrector' asociado al integrador trapezoidal, se ha comprobado que la solución global realiza solo un 0.8% más (21 sobre 2559) iteraciones que la topológica (tiempo de análisis  $t_{fin}=10$  segundos).

En la solución al problema dinámico mediante matriz R se observa una precisión muy elevada en ambos métodos y una reducción del tiempo de CPU que aumenta desde el 32% con una diada hasta el 45% con 400.

**Tabla 1:** Tiempos de CPU (en s) para análisis cinemático (KIN) y dinámico (DIN) del mecanismo manivela-biela-corredera 3D con formulaciones global (GLOB) y topológica (TOP). En dinámica se utilizan penalizadores (Penalty) y matriz R (matR). Datos de análisis con incremento de paso de tiempo  $dt=0.005s$  ( $_{0005}$  en la gráfica)

Número diadas	nEq	DIM	GLOB_KIN	TOP_KIN	GLOB_DIN Penalty	TOP_DIN Penalty	GLOB_DIN matR	TOP_DIN matR
1	19	16	0.354	0.315	0.390	0.285	0.696	0.473
9	99	88	2.583	1.844	3.198	1.783	3.785	2.574
18	189	169	5.171	3.564	7.691	4.654	7.233	4.898
36	369	331	10.607	7.004	19.266	10.582	14.607	9.922
72	729	655	22.508	13.883	64.324	24.445	31.065	18.923
144	1449	1303	50.431	27.642	202.359	56.815	64.355	37.482
288	2889	2599	122.757	55.161	672.505	130.391	134.275	75.574
400	4009	3607	194.205	76.564	1256.135	193.53	191.720	104.848

## 6. Conclusiones

En este trabajo se ha descrito cómo se puede implementar el método topológico basado en ecuaciones de grupo al problema dinámico directo de sistemas multicuerpo. Además se ha implementado la metodología descrita en lenguaje de programación FORTRAN 90 y se ha aplicado a la solución cinemática y dinámica de un mecanismo manivela-biela-corredera espacial escalable definiendo problemas de tamaño entre 19 y 4009 ecuaciones de restricción. Se han implementado las formulaciones dinámicas: matriz de complemento ortogonal (matriz R) y penalizadores para modelización en coordenadas naturales del mecanismo a estudio. La metodología descrita es aplicable a cualquier otro sistema multicuerpo, plano o espacial.

Se han lanzado análisis cinemáticos y dinámicos con la formulación basada en ecuaciones de grupo y los resultados obtenidos se han comparado en precisión y eficiencia respecto a las soluciones ofrecidas por un método global. El método global de referencia está implementado en el mismo lenguaje de programación y con el mismo tipo de coordenadas (naturales).

Los resultados analizados muestran una precisión muy elevada en la solución al problema cinemático y dinámico mediante matriz R con ambos métodos: global y topológico basado en ecuaciones de grupo. En la formulación dinámica basada en penalizadores se observan valores muy próximos de las variables analizadas (posición de la manivela en función del tiempo) a los obtenidos mediante matriz R, pero con pequeñas diferencias que muestran disipación de energía en la solución global y un muy reducido aumento de energía en la solución basada en ecuaciones de grupo.

En el análisis cinemático, elevar el incremento del valor con que se actualizan las posiciones de las coordenadas independientes del modelo en cada instante de tiempo influye negativamente en el número de iteraciones necesario para resolver el problema de posición en la solución global. Esta incidencia es mucho menor en la solución basada en ecuaciones de grupo.

El aumento de la dimensión del problema también afecta más negativamente a la solución global. Considerando estos dos efectos se ha comprobado que, en el análisis cinemático, la solución basada en ecuaciones de grupo ofrece reducciones de tiempo de CPU respecto a la global que oscilan entre un 30% y un 55%.

En cuanto a la solución al problema dinámico directo se observan reducciones de tiempo CPU que aumenta con el número de diadas considerado (desde 9 hasta 400) entre el 27% y el 84.6% con penalizadores y entre el 32% y el 45% con matriz R.

## 7. Bibliografía y referencias

- [1] M. Z. Kolovsky, A. N. Evgrafov, Y. A. Semenov, and A. V. Slousch, *Advanced theory of mechanism and machines*. Springer, 2000.
- [2] M. Saura, A. Celdran, D. Dopico and J. Cuadrado. *Computational structural analysis of planar Multibody Systems with lower and higher kinematic Pairs*. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 71, pp.79-92, 2014.
- [3] M. Saura, P. Segado, B. Muñoz, D. Dopico, and J. Cuadrado, “Multibody kinematics. a topological formulation based on structural-group coordinates,” in *Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, (Barcelona, Spain), June 29 - July 2, 2015
- [4] P. Segado, J.C. Cano, J. Cuenca, D. Giménez, M. Saura, P. Martínez. *Eficiencia de la paralización multihilo en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo basado en Ecuaciones de Grupo*, XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Elche, España, (2016).
- [5] M. Saura, J. Cuadrado, D. Dopico and A. Celdran. *Computational Kinematics of Multibody Systems: The advantages of a Topological Method Based on its Kinematic Structure*, ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2013, Zagreb, Croatia, (2013).
- [6] J. García de Jalón, E. Bayo. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer-Verlag New York (1994). ISBN 978-1-4612-2600-0.
- [7] Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL), <https://software.intel.com/en-us/mkl-reference-manual-for-fortran> (2015)
- [8] HSL, a collection of fortran codes for large-scale scientific computation, <http://www.hsl.rl.ac.uk/> (2015).